

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

INDONESIA MENUJU EMAS



Teori Lengkap • Strategi • Pembuktian • Simulasi
Bedah Soal IMO 2007–2026 beserta pembahasannya

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Aljabar

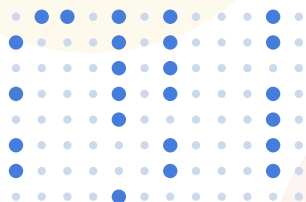
Teori Bilangan

Geometri

Kombinatorika

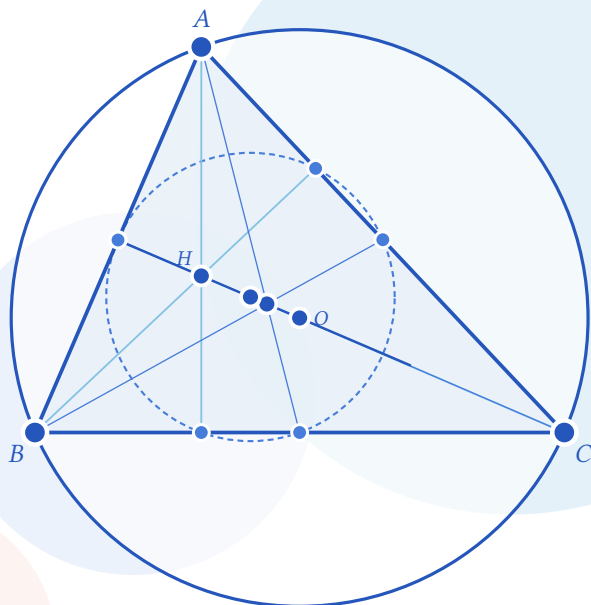
Bukan kumpulan trik, melainkan cara berpikir: definisi yang tepat, teorema yang terbukti, dan solusi yang ditulis rapi dari awal sampai akhir.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$



bilangan prima ≤ 96

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



ROMI NUR ISMANTO

Edisi 2026 • Bahasa Indonesia

Aljabar • Teori Bilangan

Geometri • Kombinatorika

MASTERBOOK OLIMPIADE MATEMATIKA SMA

INDONESIA MENUJU EMAS

Teori Lengkap • Strategi • Pembuktian • Simulasi
Bedah Soal IMO 2007–2026 beserta pembahasannya

ROMI NUR ISMANTO

Edisi 2026

Indonesia Menuju Emas

Masterbook Olimpiade Matematika SMA

Edisi 2026, tata letak dan isi disusun ulang sepenuhnya.

© 2026 Romi Nur Ismanto. Hak cipta dilindungi undang-undang.

Tentang soal IMO. Seluruh soal International Mathematical Olympiad dalam buku ini diterjemahkan secara bebas oleh penulis ke dalam bahasa Indonesia untuk keperluan pembelajaran. Rumusan resmi dalam bahasa Inggris dapat dibaca di imo-official.org. Pembahasan disusun oleh penulis; untuk beberapa soal geometri yang sangat panjang, buku ini memberikan arah penyelesaian dan reformulasi kunci, bukan solusi lengkap, dan hal itu dinyatakan dengan jelas pada tempatnya.

Sumber data. Batas medali, jumlah peserta, dan hasil tim Indonesia diambil dari situs resmi IMO (imo-official.org, bagian *Results*), keadaan per Juli 2026.

Tata huruf. Dikomposisi dengan $\text{\LaTeX}$ (Lua $\text{\LaTeX}$). Teks dan rumus memakai Libertinus Serif dan Libertinus Math; judul memakai Plus Jakarta Sans. Palet warna: biru #2556BC, biru sedang #467DDB, biru muda #85C3E5, abu #515151, dengan latar #E9F1F8, #F1F8F0, #FEF9ED, dan #FDF4F2.

Daftar Isi

Kata Pengantar	xvi
Cara Menggunakan Buku Ini	xviii
IMO dan Target Medali Emas	xxi
Daftar Notasi	xxvi
BAGIAN F FONDASI	1
F1 Logika, Himpunan, dan Bahasa Matematika	2
F1.1 Proposisi dan penghubung logika	3
F1.2 Kuantor	4
F1.3 Himpunan	5
F1.4 Hukum-hukum ekuivalensi logika	6
F1.5 Struktur bukti matematika	6
F1.6 Relasi ekuivalen dan partisi	7
F1.7 Bijeksi dan ukuran himpunan	8
Latihan	9
F2 Bilangan dan Aljabar Dasar	10
F2.1 Sistem bilangan	10
F2.2 Eksponen dan identitas aljabar	11
F2.3 Nilai mutlak	12
F2.4 Fungsi bagian bulat	12

F2.5	Persamaan dan pertidaksamaan kuadrat	13
F2.6	Sifat urutan dan ketaksamaan dasar	14
F2.7	Akar bersarang	14
F2.8	Persamaan irasional dan akar palsu	15
F2.9	Bilangan kompleks	15
F2.10	Sistem persamaan	17
	Latihan	17
F3	Fungsi	19
F3.1	Definisi dasar	19
F3.2	Injektif, surjektif, bijektif	20
F3.3	Sifat-sifat fungsi	21
F3.4	Fungsi kuadrat, eksponen, dan logaritma	21
F3.5	Grafik fungsi invers	22
F3.6	Fungsi konveks	22
F3.7	Daerah hasil dengan metode diskriminan	23
F3.8	Iterasi dan titik tetap	23
	Latihan	24
F4	Notasi Sigma, Deret, dan Induksi	26
F4.1	Notasi sigma dan pi	26
F4.2	Deret aritmetika dan geometri	27
F4.3	Prinsip induksi	27
F4.4	Teknik penjumlahan lanjut	29
F4.5	Prinsip urutan baik	29
F4.6	Variasi induksi	30
F4.7	Kesalahan-kesalahan dalam induksi	30
	Latihan	31

F5	Kombinatorika Dasar dan Peluang	33
F5.1	Aturan penjumlahan dan perkalian	34
F5.2	Permutasi dan kombinasi	34
F5.3	Bintang dan batang	35
F5.4	Inklusi–eksklusi	36
F5.5	Peluang klasik	36
F5.6	Prinsip bijeksi	37
F5.7	Identitas binomial dasar	37
F5.8	Koefisien multinomial	37
F5.9	Derangement	38
F5.10	Peluang bersyarat, kebebasan, dan nilai harapan	38
	Latihan	39
F6	Geometri dan Trigonometri Dasar	41
F6.1	Sudut dan garis sejajar	41
F6.2	Kekongruenan dan kesebangunan	42
F6.3	Teorema Pythagoras	43
F6.4	Lingkaran dasar	43
F6.5	Trigonometri	44
F6.6	Ketaksamaan dalam segitiga	45
F6.7	Perbandingan luas	45
F6.8	Aturan sinus dan aturan kosinus	46
F6.9	Geometri analitik dasar	47
F6.10	Identitas trigonometri lanjutan	47
	Latihan	48
BAGIAN I	ALJABAR	50
1	Ketaksamaan	51
1.1	Kuadrat tidak pernah negatif	51
1.2	Ketaksamaan AM-GM	52
1.3	Cauchy–Schwarz dan bentuk Engel	54

1.4	Rantai rata-rata	55
1.5	Penyusunan ulang dan Chebyshev	55
1.6	Jensen dan trik garis singgung	56
1.7	Homogenisasi dan Schur	57
1.8	Studi kasus: dari coretan ke solusi	58
1.9	Wawasan sejarah dan konteks	58
	Latihan	59
2	Polinomial	61
2.1	Pembagian, teorema sisa, dan teorema faktor	62
2.2	Rumus Vieta	62
2.3	Polinomial berkoefisien bulat	63
2.4	Argumen derajat dan interpolasi	63
2.5	Akar satuan sebagai penyaring	65
2.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	65
2.7	Wawasan sejarah dan konteks	66
	Latihan	66
3	Persamaan Fungsional	68
3.1	Substitusi dasar	68
3.2	Injektif, surjektif, dan titik tetap	69
3.3	Persamaan Cauchy	70
3.4	Fungsi pada bilangan asli	71
3.5	Kerangka penulisan solusi	71
3.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	72
3.7	Wawasan sejarah dan konteks	72
	Latihan	73
4	Barisan dan Rekurensi	74
4.1	Rekurensi linear	74
4.2	Teleskopik	75
4.3	Keperiodikan	76
4.4	Barisan Fibonacci	76

4.5	Menaksir barisan tak linear	77
4.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	78
4.7	Wawasan sejarah dan konteks	78
	Latihan	79
5	Aljabar Simetris	80
5.1	Polinomial simetris elementer	80
5.2	Identitas faktorisasi klasik	81
5.3	Jumlah Newton	82
5.4	Dua variabel: substitusi s dan p	82
5.5	Faktorisasi tersembunyi	82
5.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	83
5.7	Wawasan sejarah dan konteks	84
	Latihan	84
	BAGIAN II TEORI BILANGAN	86
6	Keterbagian	87
6.1	Definisi dan sifat dasar	87
6.2	FPB, algoritma Euclid, dan Bézout	88
6.3	Faktorisasi prima	89
6.4	Rumus Legendre	90
6.5	Faktorisasi $a^n - b^n$	90
6.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	91
6.7	Wawasan sejarah dan konteks	91
	Latihan	92
7	Kongruensi	93
7.1	Aritmetika modular	93
7.2	Fermat, Euler, dan Wilson	94
7.3	Teorema Sisa Cina	95
7.4	Orde	95
7.5	Lema <i>lifting the exponent</i>	96

7.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	97
7.7	Wawasan sejarah dan konteks	97
	Latihan	98
8	Persamaan Diofantin	99
8.1	Persamaan linear	99
8.2	Faktorisasi	100
8.3	Modulo sebagai penyaring	101
8.4	Persamaan Pell	101
8.5	<i>Vieta jumping</i>	102
8.6	<i>Infinite descent</i>	102
8.7	Studi kasus: dari coretan ke solusi	103
8.8	Wawasan sejarah dan konteks	103
	Latihan	104
9	Bilangan Prima	105
9.1	Tak hingga banyaknya bilangan prima	105
9.2	Prima modulo bilangan kecil	106
9.3	Prima yang membagi $a^2 + 1$	106
9.4	Bentuk $2^n \pm 1$	107
9.5	Distribusi bilangan prima	107
9.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	108
9.7	Wawasan sejarah dan konteks	108
	Latihan	109
10	Kuadrat dan Pangkat	110
10.1	Sisa kuadrat	111
10.2	Terjepit di antara dua kuadrat	111
10.3	Hasil kali yang kuadrat	112
10.4	Tripel Pythagoras	112
10.5	Persamaan eksponensial dan pertumbuhan	113
10.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	113
10.7	Wawasan sejarah dan konteks	114
	Latihan	114

BAGIAN III GEOMETRI	116
11 Segitiga Klasik	117
11.1 Notasi dan rumus luas	117
11.2 Garis berat dan teorema Stewart	118
11.3 Garis bagi, Ceva, dan Menelaus	119
11.4 Ketaksamaan dalam segitiga	120
11.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi	121
11.6 Wawasan sejarah dan konteks	121
Latihan	122
12 Lingkaran	123
12.1 Sudut keliling dan segi empat talibusur	123
12.2 Kuasa titik	124
12.3 Sumbu radikal dan pusat radikal	125
12.4 Teorema Ptolemy	126
12.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi	126
12.6 Wawasan sejarah dan konteks	127
Latihan	128
13 Transformasi Geometri	129
13.1 Refleksi	129
13.2 Rotasi	130
13.3 Homoteti dan garis Euler	131
13.4 Inversi	132
13.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi	132
13.6 Wawasan sejarah dan konteks	133
Latihan	134
14 Koordinat, Vektor, dan Bilangan Kompleks	135
14.1 Koordinat Kartesius	135
14.2 Vektor	136
14.3 Titik tinggi dengan pusat lingkaran luar sebagai titik asal	136
14.4 Bilangan kompleks	137

14.5	Studi kasus: dari coretan ke solusi	138
14.6	Wawasan sejarah dan konteks	138
	Latihan	139
15	Titik–Titik Pusat Segitiga	140
15.1	Empat titik pusat	140
15.2	Garis Euler dan lingkaran sembilan titik	141
15.3	Pantulan titik tinggi	141
15.4	Lema pusat dalam–pusat singgung luar	142
15.5	Rumus Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$	142
15.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	143
15.7	Wawasan sejarah dan konteks	144
	Latihan	144
BAGIAN IV KOMBINATORIKA		145
16	Prinsip Sarang Merpati	146
16.1	Pernyataan	146
16.2	Kotak dari bilangan	147
16.3	Barisan: teorema Erdős–Szekeres	147
16.4	Kotak geometris	148
16.5	Studi kasus: dari coretan ke solusi	148
16.6	Wawasan sejarah dan konteks	149
	Latihan	150
17	Invarian dan Monovarian	151
17.1	Invarian	151
17.2	Monovarian	153
17.3	Studi kasus: dari coretan ke solusi	154
17.4	Wawasan sejarah dan konteks	154
	Latihan	155

18	Teori Graf	156
18.1	Definisi dan lema jabat tangan	156
18.2	Ramsey dan Mantel	157
18.3	Pohon	158
18.4	Sirkuit Euler	158
18.5	Teorema Hall	159
18.6	Studi kasus: dari coretan ke solusi	159
18.7	Wawasan sejarah dan konteks	159
	Latihan	160
19	Penghitungan Ganda	161
19.1	Prinsip	161
19.2	Menukar urutan penjumlahan	162
19.3	Penghitungan ganda untuk ketaksamaan	163
19.4	Studi kasus: dari coretan ke solusi	163
19.5	Wawasan sejarah dan konteks	164
	Latihan	165
20	Permainan dan Strategi	166
20.1	Posisi P dan posisi N	166
20.2	Strategi simetri	167
20.3	Pencurian strategi	167
20.4	Nim	168
20.5	Studi kasus: dari coretan ke solusi	168
20.6	Wawasan sejarah dan konteks	169
	Latihan	169
BAGIAN V TEKNIK PEMBUKTIAN		171
21	Sepuluh Teknik Pembuktian	172
21.1	Kontradiksi	172
21.2	Induksi	173
21.3	Prinsip ekstremal	173

21.4	<i>Infinite descent</i>	173
21.5	Konstruksi	174
21.6	Eksistensi dan ketunggalan	174
21.7	Analisis kasus	174
21.8	Lema lokal	175
21.9	Simetri dan “tanpa mengurangi keumuman”	175
21.10	Contoh penyangkal	176
21.11	Studi kasus: dari coretan ke solusi	176
21.12	Wawasan sejarah dan konteks	177
	Latihan	177

BAGIAN VI BEDAH IMO 2007–2026 **179**

22	Ikhtisar Dua Puluh Tahun	180
22.1	Peringkat dan skor total	180
22.2	Rata-rata per nomor soal	181
22.3	Medali 2007–2026	182
23	IMO 2007	183
24	IMO 2008	187
25	IMO 2009	192
26	IMO 2010	195
27	IMO 2011	198
28	IMO 2012	201
29	IMO 2013	204
30	IMO 2014	207
31	IMO 2015	210
32	IMO 2016	213
33	IMO 2017	216
34	IMO 2018	221

35	IMO 2019	225
36	IMO 2020	229
37	IMO 2021	233
38	IMO 2022	236
39	IMO 2023	240
40	IMO 2024	244
41	IMO 2025	248
42	IMO 2026	252
BAGIAN VII	SIMULASI DAN JALAN MENUJU EMAS	258
43	Strategi Hari Kompetisi dan Paket Simulasi	259
43.1	Manajemen waktu 4,5 jam	260
43.2	Menghasilkan ide	260
43.3	Poin parsial	260
43.4	Pemulihan dari kesalahan	260
43.5	Memoles bukti	261
43.6	Paket simulasi	261
43.7	Kunci singkat	263
44	Problem Set Intensif	264
	Aljabar	264
	Teori Bilangan	265
	Geometri	265
	Kombinatorika	266
45	Jalan Menuju Emas	267
45.1	Tesis data	267
45.2	Rencana dua belas bulan	268
45.3	Tanda bahaya	268
45.4	Jurnal kesalahan	269
45.5	Kata akhir	269

Lampiran A. Kamus Teknik 270

Lampiran B. Daftar Periksa Sebelum Menyerahkan 271

Lampiran C. Daftar Rujukan 272

Lampiran D. Program Dua Belas Minggu 273

Lampiran E. Rubrik Penilaian 0–7 274

Lampiran F. Petunjuk Latihan 275

Lampiran G. Glosarium 285

Lampiran H. Pembahasan Lengkap Latihan 290

 Bab F1 — Logika, Himpunan, dan Bahasa Matematika 291

 Bab F2 — Bilangan dan Aljabar Dasar 294

 Bab F3 — Fungsi 296

 Bab F4 — Notasi Sigma, Deret, dan Induksi 299

 Bab F5 — Kombinatorika Dasar dan Peluang 301

 Bab F6 — Geometri dan Trigonometri Dasar 303

 Bab 1 — Ketaksamaan 306

 Bab 2 — Polinomial 310

 Bab 3 — Persamaan Fungsional 314

 Bab 4 — Barisan dan Rekurensi 318

 Bab 5 — Aljabar Simetris 321

 Bab 6 — Keterbagian 324

 Bab 7 — Kongruensi 327

 Bab 8 — Persamaan Diofantin 330

 Bab 9 — Bilangan Prima 333

 Bab 10 — Kuadrat dan Pangkat 336

 Bab 11 — Segitiga Klasik 339

 Bab 12 — Lingkaran 342

 Bab 13 — Transformasi Geometri 345

 Bab 14 — Koordinat, Vektor, dan Bilangan Kompleks 348

 Bab 15 — Titik-Titik Pusat Segitiga 350

Bab 16 — Prinsip Sarang Merpati	353
Bab 17 — Invarian dan Monovarian	356
Bab 18 — Teori Graf	358
Bab 19 — Penghitungan Ganda	361
Bab 20 — Permainan dan Strategi	363
Bab 21 — Sepuluh Teknik Pembuktian	366
Bab 44 — Problem Set Intensif	369

Kata Pengantar

Pada Juli 2018 di Cluj-Napoca, tim Indonesia menempati peringkat 10 dunia. Enam siswa, enam medali: satu emas dan lima perak. Delapan tahun kemudian, di Shanghai, tim Indonesia berada di peringkat 63 dengan 91 poin, total terendah dalam satu dekade. Buku ini ditulis karena jarak antara dua angka itu, 10 dan 63, dapat dijelaskan, dan karena apa yang dapat dijelaskan dapat diperbaiki.

Data resmi IMO sepuluh tahun terakhir bercerita dengan sangat jelas. Siswa Indonesia hampir selalu menyelesaikan soal nomor 1 dan 4: rata-rata sekitar 6,6 dari 7 poin. Pada soal nomor 3 dan 6, yang tersulit, rata-rata kurang dari setengah poin, sama seperti sebagian besar negara di dunia. Perbedaan antara tahun gemilang dan tahun biasa hampir seluruhnya terletak di tengah: soal nomor 2 dan 5. Pada 2018 dan 2019, tim Indonesia mengumpulkan lebih dari 70 poin dari kedua soal itu; pada 2021 dan 2026, kurang dari 25. Sementara itu, standar dunia terus naik: batas emas rata-rata kini 30 poin, dan pada 2025 mencapai 35.

Dengan kata lain, medali emas Indonesia tidak ditentukan oleh soal yang paling sulit, melainkan oleh *penguasaan yang tuntas atas soal menengah*, soal yang dapat diselesaikan dengan teknik dasar yang dipahami secara mendalam dan ditulis secara lengkap. Buku ini dirancang untuk tujuan itu. Setiap bab dibuka dengan penjelasan mengapa topiknya penting dan di mana ia muncul di IMO; setiap teorema dibuktikan; setiap contoh diselesaikan dari awal sampai akhir; dan setiap bab ditutup dengan inti gagasan serta latihan bertingkat yang memaksa pembaca menulis bukti sendiri.

Bagian VI membedah seratus dua puluh soal IMO 2007–2026, lengkap dengan data skor tim Indonesia per soal, sehingga pembaca dapat melihat sendiri di mana poin diperoleh dan di mana poin hilang. Bagian VII mengubah temuan itu menjadi rencana: strategi hari ujian, paket simulasi, dan program dua belas bulan. Bagi pembaca yang baru memulai, Bagian Fondasi di awal buku menyediakan dasar logika, aljabar, fungsi,

induksi, kombinatorika, dan geometri yang dibutuhkan untuk mengikuti semua bab berikutnya.

Buku ini disusun ulang total dari edisi sebelumnya. Pengulangan paragraf dan tabel yang tidak menambah isi telah dihapus dan diganti dengan teori, contoh, serta pembahasan yang sesungguhnya. Jumlah halaman berkurang, tetapi setiap halaman kini bekerja.

Terima kasih kepada para pembina olimpiade, guru, orang tua, dan siswa di seluruh Indonesia yang terus menjaga tradisi ini. Peringkat 10 pernah dicapai; peringkat itu dapat dicapai lagi, dan medali emas dapat menjadi kebiasaan, bukan kejutan.

Romi Nur Ismanto

2026

Cara Menggunakan Buku Ini

Struktur buku

Buku ini dibuka dengan Bagian Fondasi (Bab F1–F6), lalu tujuh bagian utama. Bagian Fondasi merangkum dasar yang harus dikuasai sebelum masuk ke materi olimpiade: logika dan himpunan, bilangan dan aljabar dasar, fungsi, notasi sigma dan induksi, kombinatorika dasar dan peluang, serta geometri dan trigonometri dasar. Pembaca yang sudah fasih dapat memakainya sebagai rujukan cepat. Bagian I–IV membangun empat pilar olimpiade: aljabar, teori bilangan, geometri, dan kombinatorika. Bagian V merangkum sepuluh teknik pembuktian yang dipakai lintas bidang. Bagian VI membedah seluruh soal IMO 2007–2026. Bagian VII berisi strategi kompetisi, paket simulasi, problem set intensif, dan rencana fase akhir menuju medali emas. Lampiran memuat kamus teknik, daftar Periksa, rujukan, program dua belas minggu, rubrik penilaian, petunjuk latihan, glosarium istilah, serta pembahasan lengkap semua soal latihan.

Anatomi setiap bab

Setiap bab dibuka dengan *Peta Bab* yang menyebut kemampuan yang ditargetkan. Materi disusun dalam kotak-kotak berwarna yang maknanya selalu sama:

■ **DEFINISIO.1** (*contoh tampilan*) Kotak biru muda dengan garis biru muda memuat definisi: arti tepat suatu istilah.

★ **TEOREMA 0.2** (*contoh tampilan*) Kotak biru muda dengan garis biru tua memuat teorema, lema, atau akibat. Pernyataannya ditulis miring dan hampir selalu diikuti bukti yang diakhiri tanda $\square$.

 **CONTOH 0.1** (*contoh tampilan*) Kotak hijau muda memuat soal contoh. Penyelesaiannya ditulis di luar kotak dan diakhiri tanda ■.

 **STRATEGI** Kotak krem memuat heuristik: kapan sebuah teknik layak dicoba dan bagaimana memulainya.

 **AWAS** Kotak merah muda memuat kesalahan yang sering membuat nilai hilang.

Legenda ikon

Ikon-ikon kecil berikut dipakai secara konsisten di seluruh buku, sehingga jenis setiap bagian dapat dikenali sekilas.

	Peta bab (tujuan belajar)		Soal IMO
	Definisi		Ide kunci
	Teorema, lema, akibat		Arah penyelesaian
	Contoh soal		Pelajaran dari satu tahun IMO
	Strategi		Ide kunci & cara menemukannya
	Awat (kesalahan umum)		Catatan penilaian
	Catatan		Pengembangan
	Medali emas, perak, perunggu		Lencana bagian pada judul bab

Setiap bab utama juga memuat dua bagian naratif. *Studi kasus: dari coretan ke solusi* mengikuti jalan pikiran seorang peserta pada satu soal, lengkap dengan percobaan yang gagal, pengamatan kunci, solusi rapi, dan refleksi. *Wawasan sejarah dan konteks* menceritakan asal-usul gagasan bab itu dan tempatnya dalam matematika yang lebih luas. Bab ditutup dengan kotak *Inti Bab* dan latihan.

Tingkat kesulitan latihan

Latihan di akhir setiap bab diberi tanda bintang: ★ setara soal nomor 1 atau 4 IMO yang mudah atau olimpiade nasional; ★★ setara soal IMO nomor 1/4 yang sulit atau nomor 2/5; ★★★ setara soal IMO nomor 2/5 yang sulit atau lebih. Petunjuk singkat dikumpulkan di Lampiran F, dan pembahasan lengkap langkah demi langkah untuk *semua* latihan ada di Lampiran H. Gunakan keduanya secara bertahap: coba minimal 30 menit, lalu

baca petunjuk, coba lagi, dan baru setelah itu bandingkan dengan pembahasan lengkap. Perjuangan itulah yang melatih kemampuan.

Empat fase belajar

Fase	Waktu	Fokus dan bab yang dipakai
Fondasi	Bulan 1–3	Bab F1–F6 (bila perlu), lalu Bab 1, 2, 6, 7, 11, 12, 16, 17, 21. Kuasai definisi dan teorema, kerjakan semua latihan ★.
Transisi	Bulan 4–6	Bab 3–5, 8–10, 13–15, 18–20. Latihan ★★, tulis solusi lengkap, minta dinilai pembina.
Olimpiade	Bulan 7–9	Bagian VI (Bedah IMO) dan latihan ★★★. Satu soal IMO nomor 2/5 setiap hari.
Medali	Bulan 10–12	Bab 43–45: simulasi penuh 2×4,5 jam setiap minggu, jurnal kesalahan, pemolesan bukti.

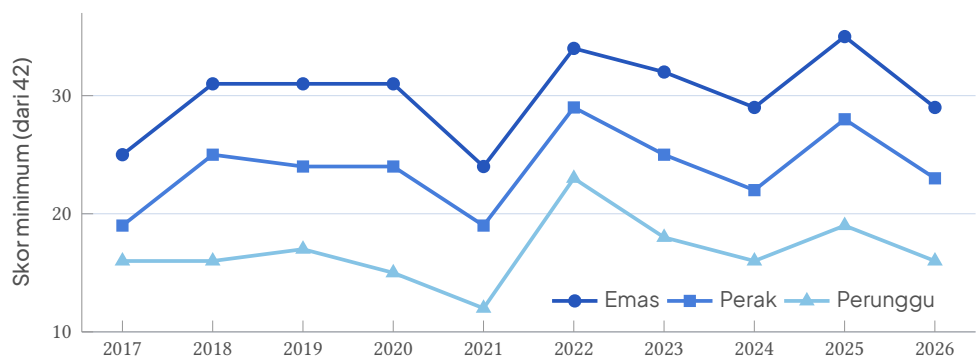
IMO dan Target Medali Emas

Format kompetisi

IMO diselenggarakan setiap bulan Juli. Setiap negara mengirim paling banyak enam siswa. Kompetisi berlangsung dua hari; setiap hari peserta mengerjakan tiga soal dalam 4 jam 30 menit. Setiap soal bernilai 0–7, sehingga nilai maksimum adalah 42. Soal nomor 1 dan 4 biasanya paling mudah, nomor 2 dan 5 sedang, sedangkan nomor 3 dan 6 paling sulit. Medali diberikan kepada paling banyak separuh peserta dengan perbandingan emas : perak : perunggu mendekati 1 : 2 : 3. Peserta tanpa medali yang memperoleh nilai 7 pada sedikitnya satu soal mendapat *honourable mention* (HM).

Batas medali 2017–2026

Tahun	Tuan rumah	Emas	Perak	Perunggu	Negara
2017	Rio de Janeiro, Brasil	25	19	16	111
2018	Cluj-Napoca, Rumania	31	25	16	107
2019	Bath, Inggris	31	24	17	112
2020	Rusia (daring)	31	24	15	105
2021	Rusia (daring)	24	19	12	107
2022	Oslo, Norwegia	34	29	23	104
2023	Chiba, Jepang	32	25	18	112
2024	Bath, Inggris	29	22	16	108
2025	Sunshine Coast, Australia	35	28	19	110
2026	Shanghai, Tiongkok	29	23	16	117
Rata-rata		30,1	23,8	16,8	

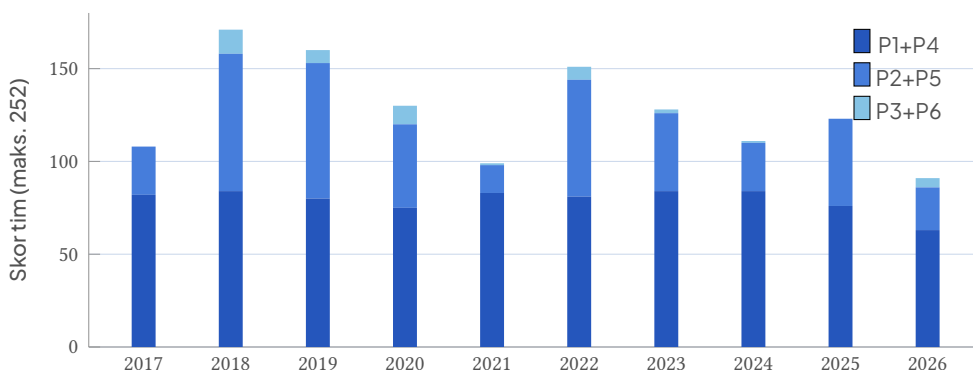


Gambar1. Batas medali IMO 2017–2026. Sumber: imo-official.org.

Rekam jejak Indonesia

Indonesia pertama kali mengikuti IMO pada 1988. Hingga 2026, tim Indonesia telah berpartisipasi 38 kali dan mengumpulkan 6 medali emas, 30 perak, 69 perunggu, dan 40 HM. Medali emas diraih pada 2013, 2018, 2019, 2020 (dua emas), dan 2024.

Tahun	Peringkat	Total	P1	P2	P3	P4	P5	P6	E	P	Pr	HM
2017	31	108	40	22	0	42	4	0	0	2	3	1
2018	10	171	42	38	3	42	36	10	1	5	0	0
2019	14	160	40	38	1	40	35	6	1	4	1	0
2020	32	130	42	23	8	33	22	2	2	0	2	2
2021	33	99	41	1	1	42	14	0	0	2	4	0
2022	38	151	39	33	7	42	30	0	0	1	4	1
2023	39	128	42	22	2	42	20	0	0	1	3	2
2024	41	111	42	17	0	42	9	1	1	0	3	2
2025	45	123	37	22	0	39	25	0	0	0	4	2
2026	63	91	33	5	5	30	18	0	0	0	4	1
Rata-rata per peserta			6,63	3,68	0,45	6,57	3,55	0,32				



Gambar 2. Skor tim Indonesia menurut kelompok soal. Tahun terbaik (2018, 2019) adalah tahun ketika P2+P5 tinggi.

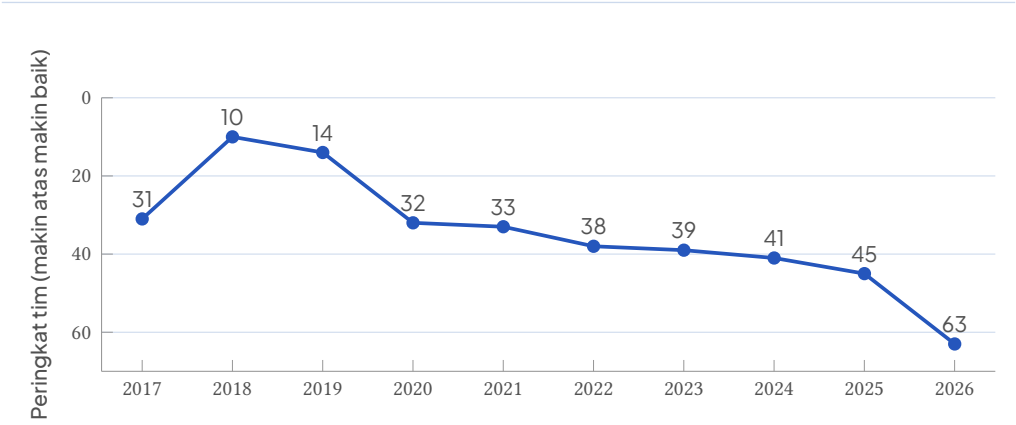
Membaca data: di mana emas ditentukan

Selama sepuluh tahun, rata-rata seorang peserta Indonesia memperoleh sekitar 6,6 poin pada P1 dan P4, sekitar 3,6 poin pada P2 dan P5, dan kurang dari setengah poin pada P3 dan P6. Totalnya sekitar 21 poin, yaitu wilayah perunggu atau perak. Gambar 2 memperlihatkan bahwa P1+P4 hampir konstan (sekitar 80 dari 84) hingga 2025, sehingga *perbedaan antara tahun biasa dan tahun gemilang hampir seluruhnya ditentukan oleh P2+P5*.

Batas emas rata-rata adalah 30 poin. Hitungan sederhana memberi resep emas:

$$\underbrace{7 + 7}_{\text{P1, P4}} + \underbrace{7 + 7}_{\text{P2, P5}} + \underbrace{2 \text{ sampai } 4}_{\text{parsial P3/P6}} = 30 \text{ sampai } 32.$$

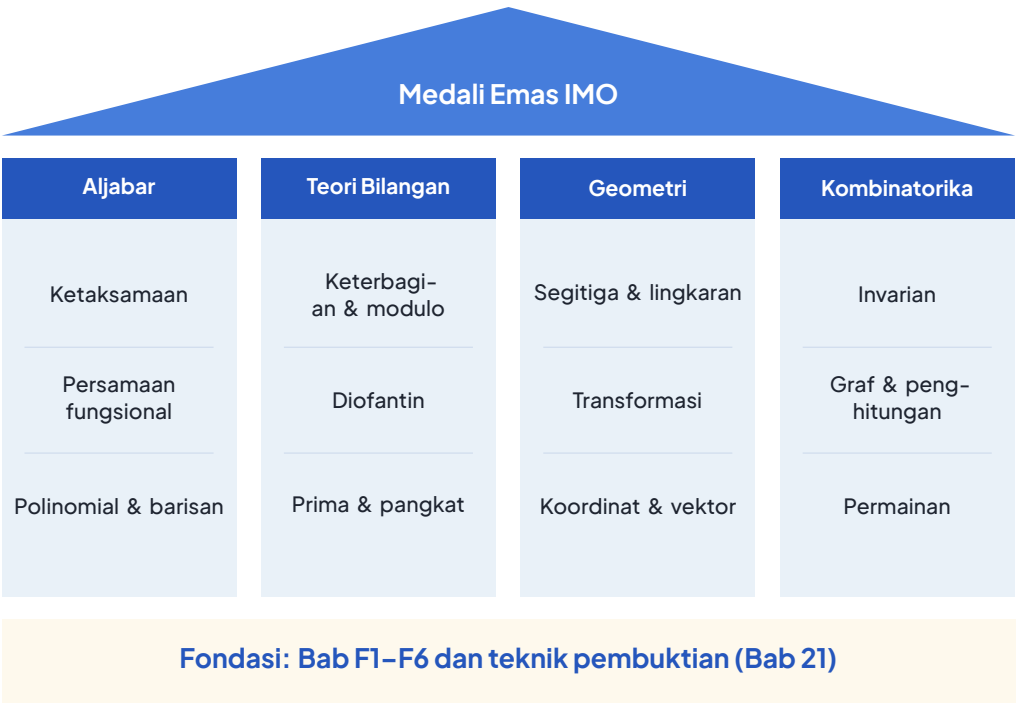
Artinya, calon peraih emas harus mengubah P2 dan P5 dari “kadang selesai” menjadi “hampir selalu selesai”, sambil membiasakan diri meraih satu atau dua poin parsial pada soal tersulit.



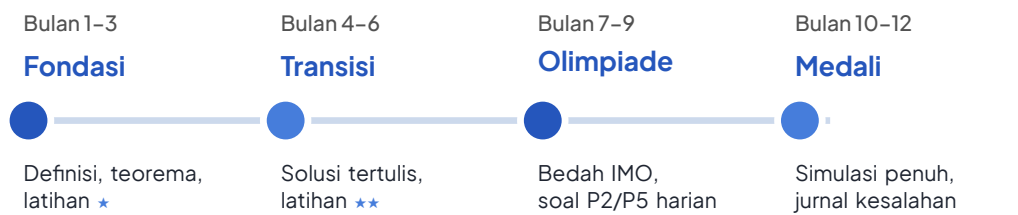
Gambar 3. Peringkat tim Indonesia di IMO 2017–2026. Sumber: imo-official.org.

Gambar 3 menambahkan dimensi kedua: peringkat. Setelah puncak 2018–2019, peringkat turun perlahan dari tahun ke tahun, lalu jatuh tajam pada 2026. Penurunan ini tidak hanya berarti tim melemah; skor 151 pada 2022, yang tertinggi ketiga dalam dekade ini, hanya menghasilkan peringkat 38. Dunia bergerak maju, dan program pembinaan harus bergerak lebih cepat. Seluruh isi buku ini, terutama Bagian VI dan VII, diarahkan untuk menjawab tantangan tersebut.

Peta kompetensi



Peta jalan dua belas bulan



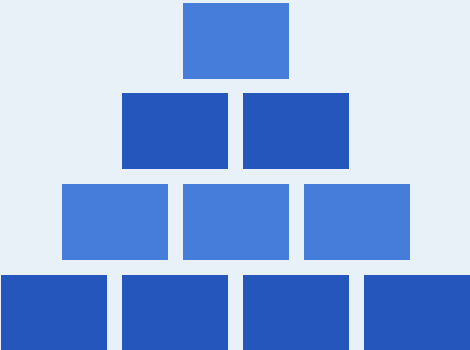
Daftar Notasi

Notasi	Arti
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots\}$, bulat, rasional, real, kompleks
$\mathbb{R}_{>0}$	bilangan real positif
$a \mid b$	a membagi b (ada bilangan bulat k dengan $b = ka$)
$\text{FPB}(a, b),$ $\text{KPK}(a, b)$	faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil (dalam kutipan soal IMO ditulis juga gcd dan lcm)
$a \equiv b \pmod{n}$	$n \mid a - b$
$v_p(n)$	pangkat tertinggi bilangan prima p yang membagi n
$\text{ord}_n(a)$	orde a modulo n : bilangan asli terkecil k dengan $a^k \equiv 1 \pmod{n}$
$\varphi(n), \tau(n), \sigma(n)$	fungsi Euler, banyak pembagi positif, jumlah pembagi positif
$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil, \{x\}$	pembulatan ke bawah, ke atas, dan bagian pecahan $x - \lfloor x \rfloor$
$\binom{n}{k}$	koefisien binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\sum_{\text{siklis}} f(a, b, c)$	jumlah siklis $f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$
$ X $	banyak anggota himpunan X , atau nilai mutlak
$a, b, c; s; R, r; \Delta$	sisi segitiga di hadapan A, B, C ; setengah keliling; jari-jari lingkaran luar dan dalam; luas
O, I, G, H	pusat lingkaran luar, pusat lingkaran dalam, titik berat, titik tinggi
$\angle ABC$	besar sudut di B pada segitiga atau lintasan $A-B-C$
$\text{Kuasa}(P, \omega)$	kuasa titik P terhadap lingkaran ω

Fondasi

Logika, bilangan dan aljabar dasar, fungsi, induksi, kombinatorika dasar, serta geometri dan trigonometri dasar. Bagian ini adalah lantai tempat seluruh buku berdiri: bacalah lebih dulu jika Anda baru memulai, atau jadikan rujukan cepat kapan pun sebuah konsep dasar terasa goyah.

$$\forall \exists \Rightarrow \sum \binom{n}{k}$$





Logika, Himpunan, dan Bahasa Matematika

Matematika olimpiade ditulis dalam bahasa yang sangat presisi. Kata “jika”, “hanya jika”, “untuk setiap”, dan “ada” memiliki arti yang tunggal dan tegas, dan satu salah tafsir dapat mengubah soal yang benar menjadi soal yang lain sama sekali. Banyak kesalahan peserta bukan kesalahan hitung, melainkan kesalahan logika: membuktikan kebalikan pernyataan, menegaskan kalimat berkuantor secara keliru, atau menganggap satu contoh sebagai bukti.

Bab ini meletakkan fondasi bahasa itu: logika proposisi, kuantor, dan himpunan. Materinya sederhana, tetapi setiap bab lain di buku ini bergantung padanya.

🎯 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) membaca dan menulis pernyataan majemuk serta implikasi dengan tepat; (2) membedakan implikasi, konvers, dan kontraposisi; (3) menegaskan pernyataan berkuantor; (4) membuktikan kesamaan himpunan dan memakai hukum De Morgan.

F1.1 Proposisi dan penghubung logika

DEFINISI F1.1 **Proposisi** adalah kalimat yang bernilai benar (B) atau salah (S), tetapi tidak keduanya. Untuk proposisi P dan Q didefinisikan negasi $\neg P$ (“bukan P ”), konjungsi $P \wedge Q$ (“ P dan Q ”), disjungsi $P \vee Q$ (“ P atau Q ”), implikasi $P \Rightarrow Q$ (“jika P maka Q ”), dan biimplikasi $P \Leftrightarrow Q$ (“ P jika dan hanya jika Q ”).

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Perhatikan dua hal. Pertama, “atau” dalam matematika bersifat inklusif: $P \vee Q$ benar juga bila keduanya benar. Kedua, implikasi $P \Rightarrow Q$ hanya salah dalam satu keadaan, yaitu P benar tetapi Q salah. Khususnya, implikasi dengan hipotesis salah selalu benar.

★ TEOREMA F1.2 (Kontraposisi) $P \Rightarrow Q$ setara dengan $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Sebaliknya, $P \Rightarrow Q$ tidak setara dengan konversnya $Q \Rightarrow P$.

Bukti. Keduanya salah tepat ketika P benar dan Q salah. Untuk konvers, ambil P salah dan Q benar: $P \Rightarrow Q$ benar, tetapi $Q \Rightarrow P$ salah. □

✎ CONTOH F1.1 Buktikan: jika n^2 genap, maka n genap.

Solusi. Buktikan kontraposisinya: jika n ganjil, maka n^2 ganjil. Tulis $n = 2k + 1$; maka $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ ganjil. ■

DEFINISI F1.3 Dalam $P \Rightarrow Q$, P disebut **syarat cukup** bagi Q , dan Q disebut **syarat perlu** bagi P . Pernyataan “ P jika dan hanya jika Q ” berarti P syarat perlu sekaligus cukup bagi Q ; membuktikannya memerlukan *dua arah*.

⚠ AWAS Kesalahan paling klasik adalah membuktikan konvers alih-alih pernyataan yang diminta. Dalam soal “tentukan semua x sehingga ...”, menemukan

kandidat dari syarat perlu belum selesai; Anda juga harus memeriksa bahwa setiap kandidat memang memenuhi (syarat cukup).

FI.2 Kuantor

 **DEFINISI FI.4** Kuantor universal $\forall x P(x)$ berarti “untuk setiap x , $P(x)$ benar”. Kuantor eksistensial $\exists x P(x)$ berarti “ada (paling sedikit satu) x sehingga $P(x)$ benar”.

 **TEOREMA FI.5** (Negasi kuantor) $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ dan $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$.

Akibatnya, untuk membantah pernyataan “untuk setiap”, cukup satu contoh penyangkal; untuk membuktikannya, satu contoh tidak pernah cukup.

 **CONTOH FI.2** Tuliskan negasi dari: “Untuk setiap bilangan asli n ada bilangan prima p dengan $n < p < 2n + 2$.”

Solusi. Negasinya: “Ada bilangan asli n sehingga untuk setiap bilangan prima p , $p \leq n$ atau $p \geq 2n + 2$.” Setiap kuantor dibalik, dan syarat $n < p < 2n + 2$ dinegasikan menjadi $p \leq n$ atau $p \geq 2n + 2$. ■

 **CONTOH FI.3** Bandingkan (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x$ dan (b) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : y > x$.

Solusi. (a) benar: untuk setiap x pilih $y = x + 1$. (b) salah: tidak ada bilangan real yang lebih besar dari semua bilangan real (ambil $x = y$). Urutan kuantor mengubah arti: pada (a), y boleh bergantung pada x ; pada (b), satu y harus berlaku untuk semua x . ■

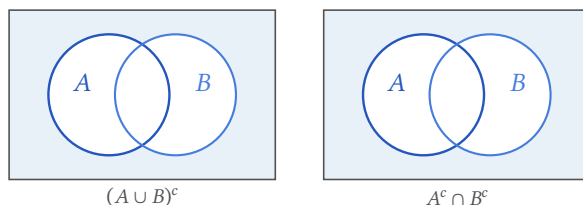
F1.3 Himpunan

DEFINISI F1.6 Untuk himpunan A, B di dalam semesta S : $A \subseteq B$ jika setiap anggota A adalah anggota B ; $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$; $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$; $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$; komplement $A^c = S \setminus A$; dan hasil kali Kartesius $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

STRATEGI Untuk membuktikan $A = B$, buktikan dua inklusi: $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$. Untuk membuktikan $A \subseteq B$, ambil $x \in A$ sembarang dan tunjukkan $x \in B$.

★ TEOREMA F1.7 (Hukum De Morgan) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Bukti. $x \in (A \cup B)^c$ jika dan hanya jika $\neg(x \in A \vee x \in B)$, yaitu $x \notin A$ dan $x \notin B$, yaitu $x \in A^c \cap B^c$. Hukum kedua serupa. $\square$



Gambar F1.1. Hukum De Morgan dalam diagram Venn: daerah di luar $A \cup B$ (kiri, diarsir) sama dengan irisan daerah di luar A dan di luar B .

CONTOH F1.4 Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solusi. Jika x ada di ruas kiri, maka $x \in A$ dan $(x \in B \text{ atau } x \in C)$; pada kasus pertama $x \in A \cap B$, pada kasus kedua $x \in A \cap C$. Jadi x ada di ruas kanan. Sebaliknya, jika $x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$, maka $x \in A$ dan x di B atau C . $\blacksquare$

★ TEOREMA F1.8 Untuk himpunan berhingga, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ dan $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Rumus pertama adalah bentuk paling sederhana dari prinsip inklusi–eksklusi, yang diperluas di Bab F5.

F1.4 Hukum-hukum ekuivalensi logika

Dua pernyataan majemuk disebut **ekuivalen**, ditulis $A \equiv B$, jika keduanya bernilai sama untuk setiap kemungkinan nilai proposisi penyusunnya. Ekuivalensi adalah alat untuk mengubah bentuk pernyataan tanpa mengubah maknanya, misalnya sebelum menegaskan atau sebelum memilih strategi bukti.

★ **TEOREMA F1.9** (Hukum-hukum dasar) Untuk proposisi P, Q, R :

Negasi ganda	$\neg\neg P \equiv P$
Komutatif, asosiatif	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
Distributif	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
De Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q, \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Implikasi	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P, \quad \neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$
Biimplikasi	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
Ekspor	$(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
Kasus	$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

Bukti. Setiap baris diperiksa dengan tabel kebenaran. Sebagai contoh, hukum kasus: ruas kiri salah tepat ketika $P \vee Q$ benar dan R salah; ruas kanan salah tepat ketika (P benar dan R salah) atau (Q benar dan R salah). Kedua syarat itu sama. □

Hukum kasus adalah dasar logika dari analisis kasus: untuk membuktikan “jika n genap atau n ganjil, maka ...”, cukup membuktikan kedua kasus secara terpisah. Hukum ekspor menjelaskan mengapa kita boleh “mengambil hipotesis satu per satu”.

🔍 **CONTOH F1.5** Sederhanakan $\neg(P \Rightarrow (Q \wedge \neg R))$.

Solusi. Dengan hukum negasi implikasi: $P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)$. Dengan De Morgan dan negasi ganda: $P \wedge (\neg Q \vee R)$. Dengan distributif: $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$. ■

F1.5 Struktur bukti matematika

Ada empat pola dasar untuk membuktikan $P \Rightarrow Q$:

- (1) **Bukti langsung:** andaikan P , lalu turunkan Q lewat rangkaian implikasi.
- (2) **Kontraposisi:** andaikan $\neg Q$, lalu turunkan $\neg P$.
- (3) **Kontradiksi:** andaikan P dan $\neg Q$, lalu turunkan pernyataan yang mustahil.

(4) **Analisis kasus:** pecah hipotesis menjadi $P_1 \vee P_2 \vee \dots$ dan buktikan setiap kasus.

Untuk pernyataan keberadaan $\exists x P(x)$, bukti dapat *konstruktif* (menunjukkan x) atau *nonkonstruktif* (membuktikan bahwa x harus ada tanpa menunjukkannya).

 **CONTOH F1.6** Buktikan: ada bilangan irasional a dan b sehingga a^b rasional.

Solusi. Pandang $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. *Kasus 1:* x rasional. Maka $a = b = \sqrt{2}$ memenuhi. *Kasus 2:* x irasional. Maka $a = x$ dan $b = \sqrt{2}$ memenuhi, karena $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Dalam kedua kasus pasangan yang diminta ada, walaupun kita tidak tahu kasus mana yang benar. ■

 **STRATEGI** Bukti nonkonstruktif sah dan sering elegan, tetapi dalam soal “tentukan” atau “konstruksikan” penilai mengharapkan objek yang eksplisit.

F1.6 Relasi ekuivalen dan partisi

 **DEFINISI F1.10** **Relasi** pada himpunan S adalah himpunan bagian $\sim$ dari $S \times S$; kita tulis $a \sim b$ jika (a, b) termasuk di dalamnya. Relasi $\sim$ disebut **relasi ekuivalen** jika *refleksif* ($a \sim a$), *simetris* ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$), dan *transitif* ($a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$). **Kelas ekuivalen** dari a adalah $[a] = \{x \in S : x \sim a\}$.

 **TEOREMA F1.11** *Kelas-kelas ekuivalen suatu relasi ekuivalen membentuk **partisi** S : setiap unsur termasuk tepat satu kelas, dan dua kelas yang berbeda saling lepas.*

Bukti. Karena refleksif, $a \in [a]$, jadi setiap unsur termasuk suatu kelas. Andaikan $c \in [a] \cap [b]$. Untuk $x \in [a]$: $x \sim a$, $a \sim c$ (simetris dari $c \sim a$), dan $c \sim b$, jadi $x \sim b$ (transitif), yaitu $x \in [b]$. Jadi $[a] \subseteq [b]$, dan dengan simetri $[b] \subseteq [a]$. Maka dua kelas yang beririsan sama. □

 **CONTOH F1.7** Pada $\mathbb{Z}$ definisikan $a \sim b$ jika $5 \mid a - b$. Tunjukkan ini relasi ekuivalen dan tentukan kelas-kelasnya.

Solusi. Refleksif: $5 \mid 0$. Simetris: jika $5 \mid a - b$ maka $5 \mid b - a$. Transitif: jika $5 \mid a - b$ dan $5 \mid b - c$, maka $5 \mid (a - b) + (b - c) = a - c$. Kelasnya adalah lima *kelas sisa*

$[0], [1], [2], [3], [4]$, menurut sisa pembagian oleh 5. Inilah fondasi aritmetika modular di Bab 7. ■

F1.7 Bijeksi dan ukuran himpunan

■ **DEFINISI F1.12** Dua himpunan A dan B **berkardinalitas sama**, ditulis $|A| = |B|$, jika ada bijeksi $A \rightarrow B$. Himpunan disebut **terhitung** jika berhingga atau berkardinalitas sama dengan $\mathbb{N}$.

Untuk himpunan berhingga, definisi ini sama dengan “banyak anggotanya sama”. Prinsip ini, yaitu *menghitung dengan bijeksi*, dipakai terus-menerus dalam kombinatorika: untuk menghitung himpunan yang sulit, cari bijeksi ke himpunan yang mudah dihitung.

★ **TEOREMA F1.13** (1) $\mathbb{Z}$ terhitung. (2) $\mathbb{Q}$ terhitung. (3) $\mathbb{R}$ tidak terhitung (Cantor).

Bukti. (1) Bijeksi $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$: $1, 2, 3, 4, 5, \dots \mapsto 0, 1, -1, 2, -2, \dots$ (2) Susun semua pecahan $\frac{p}{q}$ dengan $q \geq 1$ menurut $|p| + q = 2, 3, 4, \dots$; setiap kelompok berhingga. Daftarkan kelompok demi kelompok dan lewati pecahan yang nilainya sudah muncul. Setiap bilangan rasional muncul tepat sekali, jadi daftar itu adalah bijeksi dari $\mathbb{N}$. (3) Cukup menunjukkan $(0, 1)$ tidak terhitung. Andaikan $x_1, x_2, \dots$ adalah daftar semua bilangan di $(0, 1)$, dengan ekspansi desimal $x_i = 0, d_{i1}d_{i2}d_{i3} \dots$ (pilih ekspansi yang tidak berakhir dengan 999...). Definisikan $y = 0, e_1e_2e_3 \dots$ dengan $e_i = 5$ jika $d_{ii} \neq 5$ dan $e_i = 4$ jika $d_{ii} = 5$. Maka $y \in (0, 1)$ dan y berbeda dari setiap x_i pada digit ke- i (ekspansi y tunggal karena tidak memuat 0 atau 9). Jadi y tidak ada di daftar, kontradiksi. □

≡ **CATATAN** Argumen diagonal Cantor adalah contoh indah bukti dengan kontradiksi. Gagasan yang sama menunjukkan bahwa himpunan semua himpunan bagian $\mathbb{N}$ tidak terhitung.

Inti Bab

Implikasi hanya salah ketika hipotesis benar dan kesimpulan salah; kontraposisi setara dengannya, konvers tidak. “Jika dan hanya jika” selalu memerlukan dua arah.

Menegasikan kalimat berkuantor berarti menukar $\forall$ dan $\exists$ lalu menegasikan bagian dalamnya. Urutan kuantor mengubah arti. Kesamaan himpunan dibuktikan dengan dua inklusi.

Hukum ekuivalensi logika mengubah bentuk pernyataan tanpa mengubah maknanya; hukum kasus dan hukum ekspor adalah dasar logika analisis kasus dan pengambilan hipotesis. Empat pola bukti (langsung, kontraposisi, kontradiksi, kasus) mencakup hampir semua bukti olimpiade.

Relasi ekuivalen memecah himpunan menjadi kelas-kelas yang saling lepas; kelas sisa modulo n adalah contoh terpenting. Bijeksi adalah cara paling kuat untuk membandingkan ukuran himpunan, baik berhingga maupun tak hingga.

Latihan

- F1.1** ★ Buat tabel kebenaran untuk $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ dan simpulkan bahwa pernyataan itu selalu benar.
- F1.2** ★ Tuliskan negasi dari “Setiap bilangan genap yang lebih dari 2 adalah jumlah dua bilangan prima.”
- F1.3** ★ Buktikan: jika $a + b$ irasional, maka a irasional atau b irasional.
- F1.4** ★ Buktikan $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- F1.5** ★★ Buktikan: n habis dibagi 3 jika dan hanya jika n^2 habis dibagi 3.
- F1.6** ★★ Dari 40 siswa, 25 mengikuti pembinaan aljabar, 18 geometri, dan 7 mengikuti keduanya. Berapa siswa yang tidak mengikuti keduanya?



Bilangan dan Aljabar Dasar

Setiap soal olimpiade, seberapa pun canggihnya, akhirnya diselesaikan dengan manipulasi aljabar dasar. Menguraikan kuadrat, memfaktorkan selisih pangkat, merasionalkan penyebut, menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat: langkah-langkah ini muncul puluhan kali dalam satu solusi. Jika dilakukan dengan ragu atau lambat, waktu ujian habis; jika dilakukan dengan keliru, seluruh solusi runtuh.

Bab ini merangkum aljabar sekolah yang *harus* otomatis, ditambah dua alat yang jarang diajarkan secara tuntas di sekolah tetapi sangat sering dipakai di olimpiade: nilai mutlak dan fungsi bagian bulat.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) mengenal sifat-sifat sistem bilangan; (2) memakai hukum eksponen dan identitas aljabar dengan lancar; (3) bekerja dengan nilai mutlak dan fungsi bagian bulat; (4) menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat serta rasional.

F2.1 Sistem bilangan

Kita memakai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Himpunan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap penjumlahan, pengurangan, dan perkalian; $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ juga tertutup terhadap pembagian dengan bilangan tak nol. Bilangan real yang tidak rasional disebut **irasional**, misalnya $\sqrt{2}$ (Bab 21).

★ **TEOREMA F2.1** *Jumlah bilangan rasional dan irasional adalah irasional. Hasil kali bilangan rasional tak nol dan bilangan irasional adalah irasional.*

Bukti. Jika r rasional, s irasional, dan $r + s = q$ rasional, maka $s = q - r$ rasional, kontradiksi. Bagian kedua serupa dengan $s = q/r$. $\square$

F2.2 Eksponen dan identitas aljabar

Untuk $a, b > 0$ dan eksponen real m, n : $a^m a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, dan $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Identitas yang harus dikenali seketika:

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, & a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), \\(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),\end{aligned}$$

dan untuk setiap bilangan asli n ,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

🔪 **CONTOH F2.1** Sederhanakan $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$.

Solusi. Rasionalkan: $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Jumlahnya teleskopik: $\sqrt{100} - \sqrt{2} = 10 - \sqrt{2}$. $\blacksquare$

🔪 **CONTOH F2.2** Jika $x + \frac{1}{x} = 3$, hitung $x^2 + \frac{1}{x^2}$ dan $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Solusi. $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7$ dan $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18$. $\blacksquare$

F2.3 Nilai mutlak

DEFINISI F2.2 $|x| = x$ jika $x \geq 0$ dan $|x| = -x$ jika $x < 0$. Secara geometris, $|x - a|$ adalah jarak x ke a pada garis bilangan.

★ TEOREMA F2.3 Untuk bilangan real x, y dan $r > 0$: (1) $|xy| = |x||y|$; (2) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga); (3) $|x - a| < r$ jika dan hanya jika $a - r < x < a + r$.

Bukti. (2) Karena $-|x| \leq x \leq |x|$ dan $-|y| \leq y \leq |y|$, penjumlahan memberi $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, yaitu $|x + y| \leq |x| + |y|$. (1) dan (3) langsung dari definisi dengan memeriksa tanda. $\square$

CONTOH F2.3 Selesaikan $|2x - 3| < 5$ dan $|x - 1| + |x + 2| = 5$.

Solusi. Pertama: $-5 < 2x - 3 < 5$, jadi $-1 < x < 4$. Kedua: bagi menurut tanda. Untuk $x \geq 1$: $2x + 1 = 5$, $x = 2$. Untuk $-2 \leq x < 1$: $(1 - x) + (x + 2) = 3 \neq 5$. Untuk $x < -2$: $-2x - 1 = 5$, $x = -3$. Jawaban: $x = 2$ atau $x = -3$. $\blacksquare$

F2.4 Fungsi bagian bulat

DEFINISI F2.4 $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi x , $[x]$ adalah bilangan bulat terkecil yang tidak kurang dari x , dan $\{x\} = x - [x] \in [0, 1)$ adalah bagian pecahan. Jadi $[x] = n$ jika dan hanya jika $n \leq x < n + 1$.

Sifat dasar: $[x + n] = [x] + n$ untuk $n \in \mathbb{Z}$; $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$; dan $[-x] = -[x]$.

CONTOH F2.4 Selesaikan $[2x + 1] = 5$ dan $[x] \cdot \{x\} = 0$ untuk $x \in [0, 3)$.

Solusi. Pertama: $5 \leq 2x + 1 < 6$, jadi $2 \leq x < \frac{5}{2}$. Kedua: $[x] = 0$ (yaitu $0 \leq x < 1$) atau $\{x\} = 0$ (yaitu $x \in \{1, 2\}$); himpunan penyelesaiannya $[0, 1) \cup \{1, 2\} = [0, 1] \cup \{2\}$. $\blacksquare$

F2.5 Persamaan dan pertidaksamaan kuadrat

★ **TEOREMA F2.5** (*Rumus kuadrat*) Untuk $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$ dengan $D = b^2 - 4ac$. Akibatnya persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ bila $D \geq 0$ (dua akar real berbeda bila $D > 0$, akar kembar bila $D = 0$), dan tidak memiliki akar real bila $D < 0$.

Bukti. Lengkapi kuadrat: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. □

★ **AKIBAT F2.6** Jika $a > 0$ dan $D < 0$, maka $ax^2 + bx + c > 0$ untuk semua x (definit positif). Nilai minimum $ax^2 + bx + c$ untuk $a > 0$ adalah $-\frac{D}{4a}$, dicapai di $x = -\frac{b}{2a}$.

🔍 **CONTOH F2.5** Untuk nilai m berapa saja $x^2 + mx + 4 = 0$ memiliki akar real? Kapan kedua akarnya positif?

Solusi. Akar real jika $D = m^2 - 16 \geq 0$, yaitu $m \leq -4$ atau $m \geq 4$. Menurut Vieta, jumlah akar $-m$ dan hasil kali $4 > 0$; kedua akar positif jika jumlahnya positif, yaitu $m < 0$. Jadi kedua akar positif tepat ketika $m \leq -4$. ■

💡 **STRATEGI** Untuk pertidaksamaan rasional $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, jangan mengalikan dengan penyebut yang tandanya tidak diketahui. Pindahkan semua suku ke satu ruas, faktorkan, tandai titik nol pembilang dan penyebut pada garis bilangan, lalu periksa tanda di setiap selang.

🔍 **CONTOH F2.6** Selesaikan $\frac{x-1}{x+2} \geq 1$.

Solusi. $\frac{x-1}{x+2} - 1 = \frac{-3}{x+2} \geq 0$, yang berlaku tepat ketika $x+2 < 0$. Jawaban: $x < -2$. Mengalikan kedua ruas dengan $x+2$ tanpa memperhatikan tandanya adalah kesalahan umum yang menghasilkan jawaban keliru. ■

F2.6 Sifat urutan dan ketaksamaan dasar

Semua manipulasi ketaksamaan diturunkan dari beberapa sifat dasar bilangan real:

- (1) *Trikotomi*: untuk setiap a, b tepat satu dari $a < b$, $a = b$, $a > b$ berlaku.
- (2) *Transitif*: $a < b$ dan $b < c$ mengakibatkan $a < c$.
- (3) *Penjumlahan*: $a < b$ mengakibatkan $a + c < b + c$.
- (4) *Perkalian dengan positif*: $a < b$ dan $c > 0$ mengakibatkan $ac < bc$.

★ **TEOREMA F2.7** Untuk bilangan real: (1) jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$; (2) $a^2 \geq 0$, dengan kesamaan hanya untuk $a = 0$; (3) jika $0 < a < b$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; (4) jika $0 \leq a < b$, maka $a^n < b^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bukti. (1) $-c > 0$, jadi $-ac < -bc$; tambahkan $ac + bc$ ke kedua ruas. (2) Jika $a > 0$, sifat 4 memberi $a \cdot a > 0 \cdot a$; jika $a < 0$, bagian (1) memberi $a \cdot a > 0$. (3) Kalikan $a < b$ dengan $\frac{1}{ab} > 0$. (4) $b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + \dots + a^{n-1})$, dengan faktor pertama positif dan faktor kedua positif (suku $b^{n-1} > 0$). Untuk akar: jika $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$, maka mengkuadratkan (bagian 4 dengan $n = 2$) memberi $a \geq b$, kontradiksi. □

🔍 **CONTOH F2.7** Mana yang lebih besar, $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ atau $\sqrt{3} + \sqrt{6}$?

Solusi. Keduanya positif, jadi bandingkan kuadratnya: $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 = 9 + 2\sqrt{14}$ dan $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = 9 + 2\sqrt{18}$. Karena $14 < 18$, bagian (4) memberi $\sqrt{14} < \sqrt{18}$. Jadi $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ lebih besar. ■

F2.7 Akar bersarang

★ **TEOREMA F2.8** Jika $x, y \geq 0$ dengan $x + y = a$ dan $xy = b$, maka $\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dan (untuk $x \geq y$) $\sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Bukti. $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x + y \pm 2\sqrt{xy} = a \pm 2\sqrt{b}$, dan $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \geq 0$ (untuk tanda minus karena $x \geq y$). □

🔍 **CONTOH F2.8** Sederhanakan $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ dan $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$.

Solusi. $7+4\sqrt{3} = 7+2\sqrt{12}$; cari $x+y = 7$, $xy = 12$: $x = 4$, $y = 3$. Jadi $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. Untuk yang kedua, $x+y = 5$, $xy = 6$: $x = 3$, $y = 2$, sehingga $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. ■

F2.8 Persamaan irasional dan akar palsu

Mengkuadratkan kedua ruas persamaan *tidak* menghasilkan persamaan yang setara: $u = v$ mengakibatkan $u^2 = v^2$, tetapi sebaliknya $u^2 = v^2$ hanya berarti $u = \pm v$. Karena itu setiap akar yang diperoleh harus diperiksa.

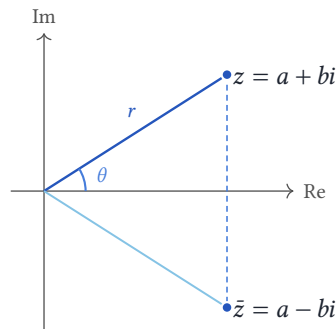
CONTOH F2.9 Selesaikan $\sqrt{x+3} = x-3$.

Solusi. Syarat: $x+3 \geq 0$ dan ruas kanan $x-3 \geq 0$ (karena akar tak negatif), jadi $x \geq 3$. Kuadratkan: $x+3 = x^2-6x+9$, yaitu $x^2-7x+6 = 0$, sehingga $x = 1$ atau $x = 6$. Syarat $x \geq 3$ membuang $x = 1$ (memang $\sqrt{4} = 2 \neq -2$). Pemeriksaan $x = 6$: $\sqrt{9} = 3 = 6 - 3$. Jawaban: $x = 6$. ■

AWAS Menulis syarat “ruas kanan tak negatif” *sebelum* mengkuadratkan adalah kebiasaan yang mencegah akar palsu. Tanpa syarat ini, $x = 1$ akan ikut terbawa.

F2.9 Bilangan kompleks

DEFINISI F2.9 Bilangan kompleks berbentuk $z = a + bi$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i^2 = -1$. **Konjugat** z adalah $\bar{z} = a - bi$, dan **modulus**-nya $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Gambar F2.1. Bidang kompleks: $z = a + bi$ dengan modulus $r = |z|$ dan argumen θ ; konjugat $\bar{z}$ adalah pencerminan terhadap sumbu riil.

Penjumlahan dan perkalian mengikuti aturan aljabar biasa dengan $i^2 = -1$: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Sifat-sifat berikut mudah diperiksa: $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $z\bar{z} = |z|^2$, dan $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

★ **TEOREMA F2.10** (*Bentuk polar dan De Moivre*) Setiap $z \neq 0$ dapat ditulis $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ dengan $r = |z|$. Jika $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, maka $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$. Akibatnya $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Bukti. Jabarkan hasil kali dan gunakan rumus jumlah sudut (Bab F6): bagian riil $r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$, dan bagian imajiner serupa. Rumus De Moivre mengikuti dengan induksi. □

Jadi perkalian bilangan kompleks *mengalikan panjang dan menjumlahkan sudut*. Inilah sebabnya perkalian dengan $\cos \theta + i \sin \theta$ adalah rotasi sebesar θ (Bab 14). Kita juga menulis $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

🔍 **CONTOH F2.10** Hitung $(1 + i)^{10}$.

Solusi. $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$. Menurut De Moivre,

$$(1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} (\cos 450^\circ + i \sin 450^\circ) = 32(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 32i.$$

Pemeriksaan: $(1 + i)^2 = 2i$, jadi $(1 + i)^{10} = (2i)^5 = 32i^5 = 32i$. ■

★ **TEOREMA F2.11** (*Akar satuan*) Persamaan $z^n = 1$ memiliki tepat n akar $\omega_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, yang terletak pada titik sudut segi- n beraturan pada lingkaran satuan. Untuk $n \geq 2$ jumlahnya 0.

Bukti. Menurut De Moivre setiap ω_k memenuhi $\omega_k^n = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1$, dan kesemuanya berbeda; polinomial berderajat n tidak memiliki lebih dari n akar. Dengan $\omega = \omega_1 \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$. □

F2.10 Sistem persamaan

Sistem linear diselesaikan dengan eliminasi. Untuk sistem dua persamaan dua variabel $ax + by = e$, $cx + dy = f$, jika $ad - bc \neq 0$ penyelesaiannya tunggal: $x = \frac{ed-bf}{ad-bc}$, $y = \frac{af-ec}{ad-bc}$. Sistem nonlinear yang simetris sering diselesaikan dengan $s = x + y$ dan $p = xy$ (Bab 5).

 **CONTOH F2.11** Selesaikan $x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 13$.

Solusi. $xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{25-13}{2} = 6$. Maka x, y adalah akar $t^2 - 5t + 6 = 0$, yaitu $\{2, 3\}$. Solusinya $(2, 3)$ dan $(3, 2)$. ■

Inti Bab

Identitas aljabar dasar dan faktorisasi $a^n - b^n$ harus dikenali tanpa berpikir. Merasionalkan penyebut sering menghasilkan teleskopik.

Nilai mutlak diselesaikan dengan memecah kasus menurut tanda; ketaksamaan segitiga $|x + y| \leq |x| + |y|$ adalah alat utamanya. Fungsi bagian bulat dikendalikan oleh $[x] = n \iff n \leq x < n + 1$.

Melengkapkan kuadrat menjelaskan rumus kuadrat, diskriminan, dan nilai ekstrem sekaligus. Pada pertidaksamaan, jangan pernah mengalikan dengan ekspresi yang tandanya belum diketahui.

Sifat urutan (trikotomi, transitif, penjumlahan, perkalian dengan positif) adalah fondasi semua ketaksamaan; mengalikan dengan bilangan negatif membalik arah, dan mengkuadratkan hanya aman untuk bilangan tak negatif. Akar bersarang $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ dapat disederhanakan bila $x + y = a$, $xy = b$ memiliki solusi yang baik.

Bilangan kompleks dalam bentuk polar mengubah perkalian menjadi penjumlahan sudut; akar satuan adalah titik sudut segi- n beraturan dan berjumlah nol.

Latihan

F2.1 ★ Faktorkan $x^4 - y^4$, $x^6 - 1$, dan $a^3 + b^3 + 3ab - 1$ (untuk yang terakhir, gunakan identitas $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ dengan $c = -1$).

F2.2 ★ Jika $a - b = 2$ dan $ab = 3$, hitung $a^3 - b^3$.

F2.3 ★ Selesaikan $|x - 2| \leq |x + 4|$.

F2.4 ★ Tentukan nilai minimum $2x^2 - 8x + 11$ dan nilai x yang mencapainya.

F2.5 ★★ Buktikan $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ untuk semua x real.

F2.6 ★★ Tentukan semua m sehingga $x^2 - 2mx + m + 6 > 0$ untuk semua x real.



Fungsi

Fungsi adalah konsep yang menyatukan hampir seluruh matematika olimpiade. Barisan adalah fungsi pada bilangan asli, polinomial adalah fungsi dengan bentuk khusus, dan persamaan fungsional (salah satu jenis soal IMO yang paling sering) menanyakan fungsi itu sendiri.

Agar dapat bekerja dengan fungsi secara formal, kita perlu kosakata yang tepat: daerah asal, daerah kawan, injektif, surjektif, komposisi, dan invers. Bab ini juga meninjau keluarga fungsi yang paling sering muncul, termasuk eksponen dan logaritma, beserta cara membaca grafiknya.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menentukan daerah asal dan daerah hasil; (2) memeriksa injektif, surjektif, dan bijektif; (3) menyusun komposisi dan invers; (4) memakai sifat monoton, genap, ganjil, dan periodik; (5) memakai hukum logaritma dan nilai ekstrem fungsi kuadrat.

F3.1 Definisi dasar

■ **DEFINISI F3.1** Fungsi $f: A \rightarrow B$ memasangkan *setiap* $x \in A$ dengan *tepat satu* $f(x) \in B$. Himpunan A disebut **daerah asal**, B **daerah kawan**, dan $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ **daerah hasil**.

 **CONTOH F3.1** Tentukan daerah asal alami dan daerah hasil $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ dan $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

Solusi. f terdefinisi bila $4 - x^2 \geq 0$, yaitu $-2 \leq x \leq 2$, dengan daerah hasil $[0, 2]$. Untuk g , daerah asalnya $x \neq 3$. Dari $y = \frac{2x+1}{x-3}$ diperoleh $x = \frac{3y+1}{y-2}$, yang terdefinisi untuk $y \neq 2$; jadi daerah hasilnya $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. ■

F3.2 Injektif, surjektif, bijektif

 **DEFINISI F3.2** $f: A \rightarrow B$ **injektif** jika $f(x_1) = f(x_2)$ mengakibatkan $x_1 = x_2$; **surjektif** jika $f(A) = B$; **bijektif** jika keduanya. Fungsi bijektif memiliki **invers** $f^{-1}: B \rightarrow A$ dengan $f^{-1}(f(x)) = x$ dan $f(f^{-1}(y)) = y$.

 **TEOREMA F3.3** Jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ keduanya injektif (surjektif), maka $g \circ f$ injektif (surjektif). Jika f naik tegas, maka f injektif.

Bukti. Jika $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, injektivitas g memberi $f(x_1) = f(x_2)$, lalu injektivitas f memberi $x_1 = x_2$. Untuk surjektif: setiap $z \in C$ adalah $g(y)$ untuk suatu $y \in B$, dan $y = f(x)$ untuk suatu $x \in A$. Terakhir, jika $x_1 \neq x_2$, misalkan $x_1 < x_2$; maka $f(x_1) < f(x_2)$. □

 **CONTOH F3.2** Tunjukkan $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ bijektif dari $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ke $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, dan tentukan inversnya.

Solusi. Pada contoh sebelumnya, setiap $y \neq 2$ memiliki tepat satu praperistiwa $x = \frac{3y+1}{y-2}$ (dan $x \neq 3$, sebab $x = 3$ akan memberi $3y - 6 = 3y + 1$). Jadi g bijektif dan $g^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}$. ■

 **AWAS** Injektif atau surjektif bergantung pada daerah asal dan daerah kawan. $f(x) = x^2$ tidak injektif pada $\mathbb{R}$, tetapi injektif pada $[0, \infty)$; tidak surjektif ke $\mathbb{R}$, tetapi surjektif ke $[0, \infty)$. Selalu sebutkan daerah asal dan kawan dengan jelas.

F3.3 Sifat-sifat fungsi

DEFINISI F3.4 f **naik** (tidak turun) jika $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, dan **naik tegas** jika $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. f **genap** jika $f(-x) = f(x)$, **ganjil** jika $f(-x) = -f(x)$, dan **periodik** dengan periode $T > 0$ jika $f(x + T) = f(x)$ untuk semua x .

Grafik fungsi genap simetris terhadap sumbu- y , grafik fungsi ganjil simetris terhadap titik asal. Grafik $y = f(x - a) + b$ adalah grafik $y = f(x)$ yang digeser a ke kanan dan b ke atas; grafik $y = f(-x)$ adalah pencerminannya terhadap sumbu- y .

CONTOH F3.3 Buktikan setiap fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dapat ditulis sebagai jumlah fungsi genap dan fungsi ganjil.

Solusi. $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{genap}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{ganjil}}$. Pemeriksaan sifat genap dan ganjil langsung dengan mengganti x oleh $-x$. ■

F3.4 Fungsi kuadrat, eksponen, dan logaritma

Grafik $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah parabola dengan puncak di $x = -\frac{b}{2a}$; nilai ekstremnya $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (Bab F2).

CONTOH F3.4 Sebuah pagar sepanjang 40 m dipakai untuk membatasi tiga sisi lahan persegi panjang (sisi keempat berupa tembok). Tentukan luas maksimum.

Solusi. Jika dua sisi tegak lurus tembok masing-masing x , sisi sejajar tembok $40 - 2x$ dan luasnya $x(40 - 2x) = -2(x - 10)^2 + 200$. Maksimum 200 m^2 di $x = 10$. ■

DEFINISI F3.5 Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, dan $x > 0$: $\log_a x = y$ jika dan hanya jika $a^y = x$.

★ TEOREMA F3.6 (*Hukum logaritma*) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^r = r \log_a x$, dan $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Fungsi a^x dan $\log_a x$ naik tegas bila $a > 1$ dan turun tegas bila $0 < a < 1$.

🔍 **CONTOH F3.5** Selesaikan $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

Solusi. Syarat: $x > 2$. Persamaan menjadi $\log_2(x(x - 2)) = 3$, yaitu $x^2 - 2x - 8 = 0$, sehingga $x = 4$ atau $x = -2$. Hanya $x = 4$ memenuhi syarat. ■

⚠️ **AWAS** Pada persamaan logaritma dan akar, selalu tuliskan syarat daerah asal *sebelum* menyelesaikan, lalu periksa setiap akar terhadap syarat itu. Langkah seperti mengkuadratkan atau menggabungkan logaritma dapat memunculkan akar palsu.

F3.5 Grafik fungsi invers

★ **TEOREMA F3.7** Jika $f: A \rightarrow B$ bijektif, grafik f^{-1} adalah pencerminan grafik f terhadap garis $y = x$. Jika f naik tegas, maka f^{-1} juga naik tegas.

Bukti. (a, b) terletak pada grafik f jika dan hanya jika $f(a) = b$, jika dan hanya jika $f^{-1}(b) = a$, jika dan hanya jika (b, a) terletak pada grafik f^{-1} ; dan pencerminan terhadap $y = x$ memetakan (a, b) ke (b, a) . Untuk bagian kedua, misalkan $y_1 < y_2$ dan $x_i = f^{-1}(y_i)$. Jika $x_1 \geq x_2$, maka $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, kontradiksi. □

F3.6 Fungsi konveks

■ **DEFINISI F3.8** Fungsi f pada selang I disebut **konveks** jika untuk setiap $x, y \in I$ dan $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t f(x) + (1 - t) f(y),$$

dan **konkaf** jika ketaksamaannya terbalik. Secara geometris, f konveks jika setiap tali busur grafiknya terletak di atas (atau pada) grafik.

★ **TEOREMA F3.9** (1) $f(x) = x^2$ konveks pada $\mathbb{R}$. (2) $f(x) = \frac{1}{x}$ konveks pada $(0, \infty)$. (3) $f(x) = |x|$ konveks pada $\mathbb{R}$. (4) Jumlah dua fungsi konveks konveks.

Bukti. (1) $tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 = t(1-t)(x-y)^2 \geq 0$. (2) $\frac{t}{x} + \frac{1-t}{y} - \frac{1}{tx+(1-t)y} = \frac{t(1-t)(x-y)^2}{xy(tx+(1-t)y)} \geq 0$. (3) Ketaksamaan segitiga: $|tx + (1-t)y| \leq t|x| + (1-t)|y|$. (4) Jumlahkan kedua ketaksamaan definisi. $\square$

 **CATATAN** Konveksitas adalah fondasi ketaksamaan Jensen (Bab 1): untuk f konveks, nilai f di rata-rata tidak melebihi rata-rata nilai f . Contohnya, dengan $f(x) = x^2$ diperoleh ketaksamaan QM-AM.

F3.7 Daerah hasil dengan metode diskriminan

Untuk fungsi rasional berderajat dua, daerah hasil dapat ditentukan tanpa kalkulus: y termasuk daerah hasil jika dan hanya jika persamaan $f(x) = y$ memiliki penyelesaian real x , dan syarat ini sering berupa diskriminan tak negatif.

 **CONTOH F3.6** Tentukan daerah hasil $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Solusi. Bilangan y tercapai jika dan hanya jika $yx^2 - x + y = 0$ memiliki akar real. Untuk $y = 0$ akarnya $x = 0$. Untuk $y \neq 0$ persamaan kuadrat memiliki akar real jika dan hanya jika $1 - 4y^2 \geq 0$, yaitu $|y| \leq \frac{1}{2}$. Jadi daerah hasilnya $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, dengan nilai ekstrem $\pm \frac{1}{2}$ di $x = \pm 1$. $\blacksquare$

F3.8 Iterasi dan titik tetap

 **DEFINISI F3.10** Untuk $f: A \rightarrow A$, iterasi ke- n adalah $f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n kali). Titik a dengan $f(a) = a$ disebut **titik tetap**. Jika $f^{(n)}$ adalah fungsi identitas, f disebut **berperiode n** .

Barisan $x_{k+1} = f(x_k)$ (Bab 4) adalah iterasi f yang dimulai dari x_0 . Jika f berperiode n , barisan itu periodik dengan periode yang membagi n .

 **CONTOH F3.7** Tunjukkan $f(x) = \frac{1}{1-x}$ berperiode 3 pada $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Solusi. $f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$, dan $f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Jadi $f^{(3)}$ adalah identitas. ■

💡 STRATEGI Pada persamaan fungsional yang memuat $f(x)$ dan $f(g(x))$ dengan g berperiode n , substitusi $x \rightarrow g(x) \rightarrow g(g(x)) \rightarrow \dots$ menghasilkan sistem n persamaan linear yang dapat diselesaikan (lihat Soal 3.1 dan 3.2).

Inti Bab

Fungsi adalah pasangan (aturan, daerah asal, daerah kawan). Injektif berarti “tidak ada dua masukan dengan keluaran sama”, surjektif berarti “setiap nilai di daerah kawan tercapai”. Fungsi bijektif memiliki invers, dan fungsi naik tegas selalu injektif.

Sifat genap, ganjil, periodik, dan monoton adalah informasi struktural yang sering menjadi langkah pertama dalam persamaan fungsional (Bab 3). Hukum logaritma dan eksponen harus dipakai bersama syarat daerah asal.

Grafik fungsi invers adalah pencerminan terhadap $y = x$. Fungsi konveks memiliki tali busur di atas grafiknya; x^2 , $\frac{1}{x}$ (untuk $x > 0$), dan $|x|$ adalah contoh dasar, dan konveksitas adalah fondasi ketaksamaan Jensen.

Daerah hasil fungsi rasional dapat ditentukan dengan syarat diskriminan. Iterasi fungsi dan titik tetap menghubungkan fungsi dengan barisan; fungsi berperiode menghasilkan sistem persamaan yang tertutup.

Latihan

F3.1 ★ Tentukan daerah asal $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$.

F3.2 ★ Jika $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 1$, tentukan $f \circ g$, $g \circ f$, dan f^{-1} .

F3.3 ★ Periksa apakah $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n + 1$ injektif dan apakah surjektif.

F3.4 ★★ Buktikan: jika $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ganjil dan periodik dengan periode T , maka $f\left(\frac{T}{2}\right) = 0$.

F3.5 ★★ Selesaikan $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$.

F3.6 ★★ Buktikan bahwa jika $g \circ f$ injektif maka f injektif, dan jika $g \circ f$ surjektif maka g surjektif. Berikan contoh bahwa g tidak harus injektif.

Notasi Sigma, Deret, dan Induksi

Olimpiade sering menanyakan pernyataan yang berlaku untuk tak hingga banyak bilangan. Kita tidak dapat memeriksa semuanya satu per satu; kita memerlukan cara untuk membuktikan sekaligus. Induksi matematika adalah cara itu, dan notasi sigma adalah bahasa untuk menuliskan jumlah panjang secara ringkas.

Bab ini membekali Anda dengan keduanya: manipulasi jumlah dan hasil kali, rumus-rumus deret yang wajib dikenal, dan induksi dalam bentuk biasa maupun kuat. Hampir setiap bab berikutnya memakai alat-alat ini tanpa penjelasan ulang.

📍 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) membaca dan memanipulasi notasi $\sum$ dan $\prod$; (2) memakai rumus deret aritmetika, geometri, dan jumlah pangkat; (3) menulis bukti induksi biasa dan induksi kuat dengan struktur yang benar.

F4.1 Notasi sigma dan pi

$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dan $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$. Sifat-sifat dasarnya:

$$\sum_{k=1}^n (ca_k + b_k) = c \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \quad (\text{geser indeks } j = k - 1).$$

Jumlah ganda dapat ditukar urutannya: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$.

⚠ AWAS $\sum a_k b_k$ tidak sama dengan $(\sum a_k)(\sum b_k)$, dan $\sum \frac{1}{a_k}$ tidak sama dengan $\frac{1}{\sum a_k}$.

F4.2 Deret aritmetika dan geometri

★ **TEOREMA F4.1** (1) $\sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$. (2) Untuk $r \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$. (3) Untuk $|r| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$.

Bukti. (1) Tulis jumlah dua kali, sekali terbalik, lalu jumlahkan suku yang berpasangan: setiap pasangan berjumlah $2a + (n-1)d$. (2) Jika S adalah jumlahnya, $rS - S = ar^n - a$. (3) Pada (2), $r^n \rightarrow 0$ bila $|r| < 1$. □

🔍 **CONTOH F4.1** Hitung $0,2\overline{7}$ sebagai pecahan, dan $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10}$.

Solusi. $0,2\overline{7} = \frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \dots = \frac{27/100}{1-1/100} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. Deret kedua: $2^{11} - 1 = 2047$. ■

F4.3 Prinsip induksi

★ **TEOREMA F4.2** (*Induksi matematika*) Misalkan $P(n)$ pernyataan tentang bilangan bulat $n \geq n_0$. Jika (i) $P(n_0)$ benar (basis) dan (ii) untuk setiap $n \geq n_0$, $P(n)$ benar mengakibatkan $P(n+1)$ benar (langkah induksi), maka $P(n)$ benar untuk semua $n \geq n_0$.

Bukti. Andaikan himpunan $n \geq n_0$ yang membuat $P(n)$ salah tak kosong; ambil anggota terkecilnya m . Karena basis benar, $m > n_0$, sehingga $P(m-1)$ benar. Langkah induksi memberi $P(m)$ benar, kontradiksi. (Bukti ini memakai prinsip bahwa setiap himpunan tak kosong bilangan bulat $\geq n_0$ memiliki anggota terkecil.) □

★ **TEOREMA F4.3** (*Induksi kuat*) Jika $P(n_0)$ benar dan untuk setiap $n \geq n_0$, kebenaran $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n)$ mengakibatkan $P(n + 1)$, maka $P(n)$ benar untuk semua $n \geq n_0$.

🔗 **CONTOH F4.2** Buktikan $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solusi. Basis $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Langkah: jika rumus benar untuk n , maka

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

yang merupakan rumus untuk $n + 1$. ■

★ **TEOREMA F4.4** (*Jumlah pangkat*) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
dan $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

🔗 **CONTOH F4.3** Buktikan $2^n > n^2$ untuk semua $n \geq 5$.

Solusi. Basis: $32 > 25$. Langkah: jika $2^n > n^2$ dengan $n \geq 5$, maka $2^{n+1} > 2n^2$, dan $2n^2 \geq (n+1)^2$ karena $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 > 0$ untuk $n \geq 3$. ■

💡 **STRATEGI** Tulis bukti induksi dengan empat bagian yang jelas: pernyataan $P(n)$, basis, hipotesis induksi, dan langkah induksi. Dalam langkah induksi, *tuliskan dulu apa yang ingin dicapai* ($P(n+1)$), lalu cari cara memakai $P(n)$ untuk mencapainya. Jika $P(n)$ saja tidak cukup, coba perkuat pernyataan atau gunakan induksi kuat.

F4.4 Teknik penjumlahan lanjut

★ **TEOREMA F4.5** (*Deret aritmetika-geometri*) Untuk $r \neq 1$, $\sum_{k=1}^n kr^k = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$. Khususnya $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Bukti. Misalkan $S = \sum_{k=1}^n kr^k$. Maka $S - rS = \sum_{k=1}^n r^k - nr^{n+1} = \frac{r-r^{n+1}}{1-r} - nr^{n+1}$. Bagi dengan $1-r$ dan sederhanakan. Untuk $r = \frac{1}{2}$ diperoleh $S = 2(1 - 2^{-n}) - n2^{-n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. □

🔍 **CONTOH F4.4** Hitung $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ dengan teleskopik.

Solusi. Perhatikan $k(k+1) = \frac{1}{3}[k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)]$. Menjumlahkan, suku-suku tengah saling menghapus: $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Pemeriksaan $n = 2$: $2 + 6 = 8 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$. ■

📖 **CATATAN** Pola ini umum: $\sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+m-1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+m)}{m+1}$, analog diskret dari $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

F4.5 Prinsip urutan baik

★ **TEOREMA F4.6** (*Prinsip urutan baik*) Setiap himpunan tak kosong bilangan asli memiliki anggota terkecil.

Prinsip ini setara dengan induksi matematika: bukti induksi di atas memakainya, dan sebaliknya prinsip ini dapat dibuktikan dengan induksi kuat. Dalam praktik, prinsip urutan baik adalah bentuk “kontradiksi dengan contoh terkecil”: andaikan pernyataan gagal, ambil contoh gagal yang terkecil, lalu tunjukkan ada contoh yang lebih kecil.

🔍 **CONTOH F4.5** Buktikan setiap bilangan asli $n \geq 2$ memiliki pembagi prima.

Solusi. Himpunan pembagi n yang lebih dari 1 tak kosong (memuat n), jadi memiliki anggota terkecil p . Jika p tidak prima, $p = ab$ dengan $1 < a < p$, dan a juga pembagi n yang lebih dari 1 dan lebih kecil dari p , kontradiksi. Jadi p prima. ■

F4.6 Variasi induksi

Selain induksi biasa dan kuat, ada pola-pola lain yang sah selama “setiap bilangan akhirnya tercapai”:

- ▶ *Induksi dengan beberapa basis:* jika $P(n) \Rightarrow P(n + k)$, diperlukan k basis $P(n_0), \dots, P(n_0 + k - 1)$.
- ▶ *Induksi maju-mundur (Cauchy):* buktikan $P(2)$, $P(n) \Rightarrow P(2n)$, dan $P(n) \Rightarrow P(n - 1)$. Dua langkah pertama mencapai semua pangkat 2, dan langkah ketiga turun ke setiap bilangan di bawahnya.

★ **TEOREMA F4.7** (*AM-GM dengan induksi maju-mundur*) Untuk bilangan positif $a_1, \dots, a_n$, $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

Bukti. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan untuk n bilangan. $P(2)$: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$. $P(n) \Rightarrow P(2n)$: bagi $2n$ bilangan menjadi dua kelompok n bilangan dengan rata-rata aritmetika A_1, A_2 dan rata-rata geometrik G_1, G_2 . Rata-rata aritmetika seluruhnya adalah $\frac{A_1 + A_2}{2} \geq \sqrt{A_1 A_2} \geq \sqrt{G_1 G_2}$, dan $\sqrt{G_1 G_2}$ adalah rata-rata geometrik seluruhnya. $P(n) \Rightarrow P(n - 1)$: untuk $a_1, \dots, a_{n-1}$ dengan rata-rata geometrik G , terapkan $P(n)$ pada $a_1, \dots, a_{n-1}, G$: $\frac{a_1 + \dots + a_{n-1} + G}{n} \geq \sqrt[n]{G^{n-1} \cdot G} = G$. Maka $a_1 + \dots + a_{n-1} \geq (n - 1)G$. □

F4.7 Kesalahan-kesalahan dalam induksi

🔍 **CONTOH F4.6** Temukan kesalahan dalam “bukti” bahwa semua kuda berwarna sama: “ $P(n)$: setiap n kuda berwarna sama. $P(1)$ benar. Untuk $n + 1$ kuda, buang kuda pertama: sisanya n kuda berwarna sama. Buang kuda terakhir: sisanya juga berwarna sama. Kedua kelompok beririsan, jadi semua $n + 1$ kuda berwarna sama.”

Solusi. Kalimat “kedua kelompok beririsan” salah untuk $n = 1$: dari dua kuda, kelompok pertama {kuda 2} dan kelompok kedua {kuda 1} tidak beririsan. Jadi langkah

$P(1) \Rightarrow P(2)$ gagal, dan seluruh rantai runtuh. Pelajarannya: langkah induksi harus berlaku untuk *setiap* $n \geq n_0$, termasuk yang terkecil. ■

⚠ AWAS Kesalahan lain yang umum: (1) memeriksa banyak kasus kecil lalu menyebutnya “induksi”; (2) memakai $P(n+1)$ di dalam langkah yang seharusnya membuktikannya; (3) lupa basis. Contoh $n^2 + n + 41$ (Bab 21) menunjukkan bahwa 40 kasus benar pun bukan bukti.

Inti Bab

Notasi sigma bersifat linear dan indeksnya dapat digeser; jumlah ganda dapat ditukar urutannya. Deret aritmetika dijumlahkan dengan memasangkan suku, deret geometri dengan mengalikan rasio lalu mengurangi.

Induksi membuktikan pernyataan untuk tak hingga banyak n dengan dua langkah berhingga: basis dan langkah induksi. Induksi kuat mengizinkan kita memakai semua kasus sebelumnya. Keduanya berakar pada prinsip bahwa setiap himpunan tak kosong bilangan asli memiliki anggota terkecil.

Deret aritmetika-geometri dijumlahkan dengan trik $S - rS$; hasil kali bilangan berurutan dijumlahkan dengan teleskopik. Prinsip urutan baik (setiap himpunan tak kosong bilangan asli memiliki anggota terkecil) setara dengan induksi dan menjadi dasar argumen “contoh gagal terkecil”.

Induksi memiliki banyak variasi: beberapa basis, induksi kuat, dan induksi maju-mundur, yang memberi bukti klasik AM-GM. Langkah induksi harus berlaku untuk setiap n , termasuk yang terkecil.

Latihan

F4.1 ★ Hitung $\sum_{k=1}^{20} (3k - 2)$ dan $\sum_{k=1}^{10} k(k + 1)$.

F4.2 ★ Buktikan dengan induksi $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

F4.3 ★ Buktikan dengan induksi bahwa $6 \mid n^3 - n$ untuk setiap bilangan asli n .

F4.4 ★★ Buktikan $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

F4.5 ★★ Buktikan $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$ dan $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

F4.6 ★★ Barisan $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Buktikan dengan induksi kuat bahwa $a_n = 2^n - 1$.

Kombinatorika Dasar dan Peluang

Menghitung adalah keterampilan yang tampak mudah, tetapi mudah pula salah. Dua kesalahan paling umum adalah menghitung satu objek dua kali dan melewatkan objek sama sekali. Aturan-aturan dasar di bab ini, seperti aturan perkalian, permutasi, kombinasi, dan inklusi–eksklusi, adalah cara sistematis untuk menghindari keduanya.

Materi ini juga fondasi bagi Bagian IV: sarang merpati, penghitungan ganda, dan graf semuanya berasumsi bahwa Anda dapat menghitung dengan cepat dan benar. Koefisien binomial yang diperkenalkan di sini akan muncul kembali di aljabar dan teori bilangan.

PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai aturan penjumlahan dan perkalian; (2) menghitung permutasi dan kombinasi, termasuk dengan unsur berulang; (3) memakai teorema binomial dan segitiga Pascal; (4) memakai metode bintang dan batang serta inklusi–eksklusi; (5) menghitung peluang klasik.

F5.1 Aturan penjumlahan dan perkalian

★ **TEOREMA F5.1** (Penjumlahan) Jika suatu pilihan dapat dilakukan dengan m cara dari jenis pertama atau n cara dari jenis kedua yang tidak beririsan, maka ada $m + n$ cara. (Perkalian) Jika sebuah proses terdiri atas dua tahap dengan m pilihan pada tahap pertama dan, untuk setiap pilihan itu, n pilihan pada tahap kedua, maka ada mn cara.

🔍 **CONTOH F5.1** Berapa banyak bilangan empat angka dengan angka-angka berbeda?

Solusi. Angka ribuan: 9 pilihan (bukan 0). Angka ratusan: 9 pilihan (termasuk 0, kecuali angka ribuan). Selanjutnya 8 dan 7. Totalnya $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. ■

F5.2 Permutasi dan kombinasi

📖 **DEFINISI F5.2** $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ dengan $0! = 1$. Banyak cara menyusun k dari n objek berbeda secara berurutan adalah $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Banyak cara memilih k dari n objek tanpa memperhatikan urutan adalah $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

★ **TEOREMA F5.3** (1) Banyak susunan n objek yang terdiri atas n_1 objek jenis pertama, ..., n_r objek jenis ke- r (objek sejenis tidak dibedakan) adalah $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$. (2) Banyak susunan n objek berbeda pada lingkaran (rotasi dianggap sama) adalah $(n-1)!$.

Bukti. (1) Dari $n!$ susunan objek yang dibedakan, setiap susunan tanpa perbedaan muncul tepat $n_1! \cdots n_r!$ kali. (2) Setiap susunan melingkar sesuai dengan tepat n susunan berjajar (pilih titik potong). □

🔍 **CONTOH F5.2** Berapa banyak susunan huruf kata MATEMATIKA?

Solusi. Ada 10 huruf: A tiga kali, M dua kali, T dua kali, dan E, I, K masing-masing sekali. Banyaknya $\frac{10!}{3! 2! 2!} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$. ■

★ **TEOREMA F5.4** (*Sifat koefisien binomial*) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ dan $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (*identitas Pascal*).

Bukti. Memilih k objek sama dengan memilih $n - k$ objek yang ditinggalkan. Untuk identitas Pascal, tetapkan satu objek istimewa: himpunan bagian yang memuatnya ada $\binom{n-1}{k-1}$, yang tidak memuatnya ada $\binom{n-1}{k}$. □

★ **TEOREMA F5.5** (*Binomial Newton*) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Bukti. Dalam penjabaran $(x + y)(x + y) \cdots (x + y)$, suku $x^k y^{n-k}$ muncul sekali untuk setiap cara memilih k faktor yang menyumbang x , yaitu $\binom{n}{k}$ kali. □

Dengan $x = y = 1$ diperoleh $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$, dan dengan $x = -1, y = 1$ diperoleh $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

F5.3 Bintang dan batang

★ **TEOREMA F5.6** Banyak solusi bilangan bulat tak negatif dari $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ adalah $\binom{n+r-1}{r-1}$; banyak solusi bilangan asli adalah $\binom{n-1}{r-1}$.

Bukti. Setiap solusi tak negatif sesuai dengan susunan n bintang dan $r - 1$ batang dalam satu baris: bintang di antara batang-batang menyatakan nilai x_i . Untuk solusi bilangan asli, substitusikan $y_i = x_i - 1 \geq 0$. □

🔍 **CONTOH F5.3** Berapa banyak cara membagikan 10 permen identik kepada 3 anak?

Solusi. Banyak solusi $x + y + z = 10$ dengan $x, y, z \geq 0$ adalah $\binom{12}{2} = 66$. ■

F5.4 Inklusi-eksklusi

★ **TEOREMA F5.7** $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

Bukti. Anggota yang termasuk tepat $t \geq 1$ dari ketiga himpunan dihitung $t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} = 1$ kali di ruas kanan (periksa $t = 1, 2, 3$). $\square$

🔍 **CONTOH F5.4** Berapa banyak bilangan di $\{1, 2, \dots, 1000\}$ yang habis dibagi 3, 5, atau 7?

Solusi. $\lfloor \frac{1000}{3} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{7} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{21} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{35} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{105} \rfloor = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$. ■

F5.5 Peluang klasik

📖 **DEFINISI F5.8** Jika semua hasil dalam ruang sampel berhingga S sama mungkin, peluang kejadian $E \subseteq S$ adalah $\Pr(E) = \frac{|E|}{|S|}$.

Akibatnya $\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$ dan $\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cap F)$.

🔍 **CONTOH F5.5** Dua dadu dilempar. Berapa peluang jumlah matanya 7? Berapa peluang paling sedikit satu dadu menunjukkan 6?

Solusi. Ruang sampel 36 pasangan. Jumlah 7 diperoleh dari 6 pasangan, jadi peluangnya $\frac{1}{6}$. Peluang tidak ada 6 adalah $\frac{25}{36}$, jadi peluang paling sedikit satu 6 adalah $\frac{11}{36}$. ■

⚠️ **AWAS** Pastikan hasil-hasil dalam ruang sampel memang sama mungkin. “Jumlah dua dadu” memiliki 11 nilai, tetapi nilai-nilai itu *tidak* sama mungkin; ruang sampel yang benar adalah 36 pasangan berurutan.

F5.6 Prinsip bijeksi

Jika ada bijeksi antara dua himpunan berhingga, keduanya memiliki banyak anggota yang sama. Seni kombinatorika sering terletak pada menemukan bijeksi dari himpunan yang sulit dihitung ke himpunan yang mudah dihitung.

 **CONTOH F5.6** Berapa banyak himpunan bagian k unsur dari $\{1, 2, \dots, n\}$ yang tidak memuat dua bilangan berurutan?

Solusi. Untuk himpunan $\{a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$ tanpa bilangan berurutan, definisikan $b_i = a_i - (i - 1)$. Karena $a_{i+1} \geq a_i + 2$, $b_{i+1} \geq b_i + 1$, jadi $b_1 < \dots < b_k$ adalah himpunan bagian k unsur dari $\{1, \dots, n - k + 1\}$. Sebaliknya setiap himpunan seperti itu kembali melalui $a_i = b_i + (i - 1)$. Bijeksi ini memberi jawaban $\binom{n-k+1}{k}$. Pemeriksaan $n = 5, k = 2$: $\binom{4}{2} = 6$, yaitu $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$. ■

F5.7 Identitas binomial dasar

★ **TEOREMA F5.9** Untuk $n \geq 1$: (1) $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$; (2) $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, sehingga banyak himpunan bagian berukuran genap sama dengan yang berukuran ganjil, yaitu 2^{n-1} ; (3) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$; (4) $\binom{n}{k}$ maksimum di $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

Bukti. (1) dan (2): substitusi $x = y = 1$ dan $x = -1, y = 1$ ke teorema binomial. (3) Kedua ruas menghitung pemilihan panitia k orang beserta ketuanya. (4) $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}$, yang ≥ 1 tepat ketika $k \leq \frac{n-1}{2}$; jadi barisan naik sampai tengah lalu turun. □

F5.8 Koefisien multinomial

★ **TEOREMA F5.10** Koefisien $x^a y^b z^c$ dalam $(x + y + z)^n$, dengan $a + b + c = n$, adalah $\binom{n}{a, b, c} = \frac{n!}{a! b! c!}$.

Bukti. Suku $x^a y^b z^c$ muncul sekali untuk setiap cara memilih, dari n faktor, a faktor yang menyumbang x dan b faktor yang menyumbang y . Banyaknya adalah banyak susunan kata dengan a huruf x , b huruf y , c huruf z , yaitu $\frac{n!}{a! b! c!}$. □

F5.9 Derangement

■ **DEFINISI F5.11** **Derangement** adalah permutasi tanpa titik tetap. Banyaknya derangement dari n objek ditulis D_n .

★ **TEOREMA F5.12** $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Nilainya $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44$, dan D_n adalah bilangan bulat terdekat dengan $\frac{n!}{e}$.

Bukti. Misalkan A_i himpunan permutasi yang menetapkan i . Irisan k himpunan A_i berukuran $(n-k)!$, dan ada $\binom{n}{k}$ irisan seperti itu. Inklusi-eksklusi: $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$, sehingga $D_n = n! - |\bigcup A_i| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$. □

🔍 **CONTOH F5.7** Empat surat dimasukkan secara acak ke empat amplop beralamat. Berapa peluang tidak ada surat yang masuk amplop yang benar?

Solusi. $\frac{D_4}{4!} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. Perhitungan: $24 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1 = 9$. ■

F5.10 Peluang bersyarat, kebebasan, dan nilai harapan

■ **DEFINISI F5.13** Untuk kejadian A, B dengan $\Pr(B) > 0$, **peluang bersyarat** $\Pr(A | B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$. Kejadian A dan B **saling bebas** jika $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$. Untuk peubah acak X yang bernilai bilangan pada ruang sampel berhingga, **nilai harapan**-nya $\mathbb{E}[X] = \sum_x x \Pr(X = x)$.

★ **TEOREMA F5.14** (*Linearitas nilai harapan*) Untuk peubah acak X, Y dan konstanta c : $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ dan $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$, tanpa syarat kebebasan.

Bukti. Pada ruang sampel berhingga yang sama mungkin S , $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{|S|} \sum_{\omega \in S} X(\omega)$. Maka $\mathbb{E}[X + Y] = \frac{1}{|S|} \sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega)) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$. (Untuk peluang tidak seragam, ganti $\frac{1}{|S|}$ dengan $\Pr(\omega)$.) □

 **CONTOH F5.8** Rata-rata banyak titik tetap permutasi acak dari $\{1, \dots, n\}$ adalah 1.

Solusi. Misalkan $X_i = 1$ jika i titik tetap dan 0 jika tidak. Maka $E[X_i] = \Pr(\sigma(i) = i) = \frac{1}{n}$. Banyak titik tetap adalah $X = X_1 + \dots + X_n$, dan linearitas memberi $E[X] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, meskipun X_i tidak saling bebas. (Bandingkan dengan Soal 19.6.) ■

 **STRATEGI** Linearitas nilai harapan dengan *peubah indikator* adalah salah satu alat paling ampuh dalam kombinatorika: untuk menghitung rata-rata banyaknya sesuatu, jumlahkan peluang setiap kejadian kecil. Metode ini juga membuktikan keberadaan: jika rata-ratanya $\geq m$, pasti ada objek dengan nilai $\geq m$ (Bab 18, Soal 18.6).

Inti Bab

Aturan perkalian untuk proses bertahap, aturan penjumlahan untuk kasus yang saling lepas. Permutasi memperhatikan urutan, kombinasi tidak; objek sejenis dikoreksi dengan membagi faktorial.

Koefisien binomial memenuhi identitas Pascal dan muncul dalam $(x+y)^n$. Bintang dan batang menghitung solusi persamaan jumlah; inklusi–eksklusi mengoreksi penghitungan ganda pada gabungan himpunan. Dalam peluang, periksa selalu bahwa hasil-hasilnya sama mungkin.

Bijeksi mengubah soal hitung yang sulit menjadi yang mudah. Identitas binomial dasar mengikuti dari substitusi pada teorema binomial atau dari argumen penghitungan; koefisien multinomial menghitung susunan kata dengan huruf berulang. Derangement dihitung dengan inklusi–eksklusi dan mendekati $\frac{n!}{e}$.

Dalam peluang, linearitas nilai harapan berlaku tanpa syarat kebebasan; bersama peubah indikator, ia menjadi alat penghitungan sekaligus alat bukti keberadaan.

Latihan

F5.1 ★ Berapa banyak cara memilih ketua, sekretaris, dan bendahara dari 10 orang? Berapa banyak cara memilih panitia beranggota 3?

F5.2 ★ Tentukan koefisien x^3 dalam $(2x - 1)^6$.

- F5.3** ★ Berapa banyak solusi bilangan asli dari $a + b + c + d = 12$?
- F5.4** ★★ Berapa banyak bilangan di $\{1, \dots, 100\}$ yang relatif prima dengan 30?
- F5.5** ★★ Delapan orang duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyak susunan jika dua orang tertentu harus duduk bersebelahan?
- F5.6** ★★ Sebuah koin dilempar 6 kali. Berapa peluang muncul tepat 3 sisi angka? Berapa peluang muncul lebih banyak angka daripada gambar?

Geometri dan Trigonometri Dasar

Geometri olimpiade dibangun di atas geometri sekolah yang dikuasai dengan sempurna. Teorema sudut keliling, kuasa titik, dan homoteti di Bagian III semuanya bermuara pada fakta-fakta dasar: sudut pada garis sejajar, kekongruenan dan kesebangunan segitiga, teorema Pythagoras, dan perbandingan trigonometri.

Bab ini menyusun fakta-fakta tersebut secara runtut, dengan bukti untuk yang terpenting. Trigonometri dimasukkan karena ia adalah jembatan antara sudut dan panjang: aturan sinus dan kosinus di Bab 11 tidak dapat dipakai tanpanya.

🎯 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) mengejar sudut dengan garis sejajar dan jumlah sudut segitiga; (2) memakai kriteria kekongruenan dan kesebangunan; (3) membuktikan dan memakai teorema Pythagoras; (4) memakai perbandingan trigonometri, nilai sudut istimewa, dan rumus jumlah sudut.

F6.1 Sudut dan garis sejajar

Dua sudut yang bersisian pada satu garis lurus berjumlah 180° (*berpelurus*); sudut bertolak belakang sama besar. Jika dua garis sejajar dipotong garis ketiga, sudut-sudut *sehadap* sama besar dan sudut-sudut *dalam berseberangan* sama besar.

★ **TEOREMA F6.1** (1) Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° . (2) Sudut luar segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam yang tidak bersisian dengannya. (3) Jumlah sudut dalam segi- n konveks adalah $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Bukti. (1) Tarik garis melalui A yang sejajar BC . Dua sudut yang dibentuknya dengan AB dan AC sama dengan $\angle B$ dan $\angle C$ (dalam berseberangan), dan bersama $\angle A$ membentuk sudut lurus. (2) Sudut luar di C adalah $180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$. (3) Tarik diagonal dari satu titik sudut; poligon terbagi menjadi $n - 2$ segitiga. □

F6.2 Kekongruenan dan kesebangunan

★ **TEOREMA F6.2** (Kriteria kekongruenan) Dua segitiga kongruen jika memenuhi salah satu: sisi-sisi-sisi (SSS), sisi-sudut-sisi (SAS, sudut di antara kedua sisi), sudut-sisi-sudut (ASA), atau sudut-sudut-sisi (AAS). Untuk segitiga siku-siku, sisi miring dan satu sisi siku-siku yang sama sudah cukup.

★ **TEOREMA F6.3** (Kriteria kesebangunan) Dua segitiga sebangun jika dua pasang sudutnya sama (AA), jika ketiga pasang sisinya sebanding (SSS), atau jika dua pasang sisi sebanding dan sudut di antaranya sama (SAS). Jika faktor kesebangunannya k , perbandingan luasnya k^2 .

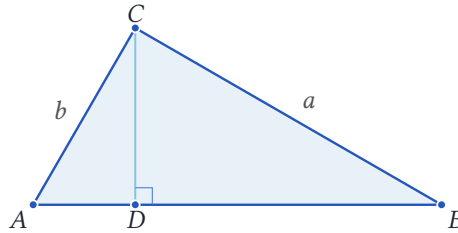
★ **AKIBAT F6.4** (Teorema dasar kesebangunan) Jika $DE \parallel BC$ dengan D pada AB dan E pada AC , maka $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

🔍 **CONTOH F6.1** Pada segitiga ABC , $DE \parallel BC$ dengan $AD = 2$, $DB = 3$, dan $DE = 4$. Tentukan BC dan perbandingan luas trapesium $DBCE$ terhadap segitiga ADE .

Solusi. Segitiga ADE dan ABC sebangun dengan faktor $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$, jadi $BC = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$. Perbandingan luas $ABC : ADE = 25 : 4$, sehingga trapesium $DBCE : ADE = 21 : 4$. ■

F6.3 Teorema Pythagoras

★ **TEOREMA F6.5** (*Pythagoras*) Pada segitiga siku-siku di C , $a^2 + b^2 = c^2$. Sebaliknya, jika $a^2 + b^2 = c^2$, segitiganya siku-siku di C .



Gambar F6.1. Garis tinggi ke sisi miring membagi segitiga siku-siku menjadi dua segitiga yang sebangun dengannya.

Bukti. Misalkan D kaki garis tinggi dari C . Segitiga ACD dan ABC sebangun (sudut A bersama dan sama-sama siku-siku), sehingga $\frac{AD}{b} = \frac{b}{c}$, yaitu $AD = \frac{b^2}{c}$. Dengan cara sama $DB = \frac{a^2}{c}$. Jumlahkan: $c = AD + DB = \frac{a^2 + b^2}{c}$. Untuk kebalikannya, bangun segitiga siku-siku dengan kaki a, b ; sisi miringnya c , sehingga kedua segitiga kongruen (SSS). ▢

🔍 **CONTOH F6.2** Segitiga siku-siku memiliki kaki 6 dan 8. Tentukan sisi miring, garis tinggi ke sisi miring, dan kedua ruas yang dibentuknya.

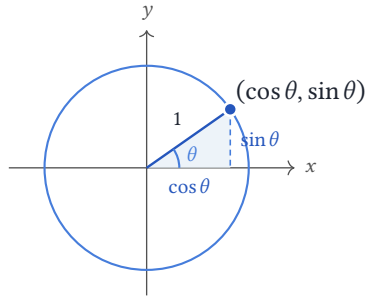
Solusi. Sisi miring 10. Luas $24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$, jadi $h = 4,8$. Ruas-ruasnya $\frac{6^2}{10} = 3,6$ dan $\frac{8^2}{10} = 6,4$. ▢

F6.4 Lingkaran dasar

Garis singgung lingkaran tegak lurus jari-jari di titik singgung, dan dua garis singgung dari satu titik luar sama panjang. Sumbu tali busur melalui pusat. Untuk sudut pusat θ (dalam derajat) pada lingkaran berjari-jari r , panjang busurnya $\frac{\theta}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ dan luas juringnya $\frac{\theta}{360^\circ} \cdot \pi r^2$.

F6.5 Trigonometri

DEFINISI F6.6 Pada segitiga siku-siku dengan sudut lancip θ : $\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$, $\cos \theta = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Untuk sudut sembarang, $(\cos \theta, \sin \theta)$ adalah titik pada lingkaran satuan dengan sudut θ dari sumbu- x positif.



Gambar F6.2. Lingkaran satuan: titik pada sudut θ adalah $(\cos \theta, \sin \theta)$, sehingga $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ adalah teorema Pythagoras.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

★ TEOREMA F6.7 (*Identitas dasar*) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, serta

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Akibatnya $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ dan $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

Sketsa bukti rumus kosinus selisih. Titik $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ dan $Q = (\cos \beta, \sin \beta)$ pada lingkaran satuan membentuk sudut pusat $\alpha - \beta$. Hitung PQ^2 dengan rumus jarak: $2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$; dengan aturan kosinus: $2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$. Rumus-rumus lain diturunkan dari rumus ini. $\square$

 **CONTOH F6.3** Hitung $\sin 75^\circ$ dan $\cos 15^\circ$.

Solusi. $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, dan $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$. ■

F6.6 Ketaksamaan dalam segitiga

★ **TEOREMA F6.8** Pada segitiga ABC : (1) (ketaksamaan segitiga) $|b - c| < a < b + c$; (2) sisi yang lebih panjang berhadapan dengan sudut yang lebih besar: $a > b \iff \angle A > \angle B$.

Bukti. (2) Misalkan $a > b$, yaitu $BC > AC$. Ambil D pada CB dengan $CD = CA$. Segitiga CAD sama kaki, jadi $\angle CAD = \angle CDA$. Sudut $\angle CDA$ adalah sudut luar segitiga ABD , jadi $\angle CDA > \angle B$. Maka $\angle A > \angle CAD = \angle CDA > \angle B$. Arah sebaliknya mengikuti dengan kontraposisi dan trikotomi. (1) Perpanjang BA melewati A ke E dengan $AE = AC$. Segitiga ACE sama kaki, jadi $\angle ACE = \angle AEC$, dan $\angle BCE > \angle ACE = \angle BEC$. Menurut (2) pada segitiga BCE , $BE > BC$, yaitu $c + b > a$. Ketaksamaan kiri mengikuti dari dua ketaksamaan kanan lainnya. □

 **CONTOH F6.4** Dua sisi segitiga 3 dan 7. Tentukan semua kemungkinan sisi ketiga x bila x bilangan bulat.

Solusi. $7 - 3 < x < 7 + 3$, jadi $x \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. ■

F6.7 Perbandingan luas

★ **TEOREMA F6.9** (1) Dua segitiga dengan tinggi sama memiliki perbandingan luas sama dengan perbandingan alasnya. (2) Jika dua segitiga memiliki satu sudut yang sama besar, perbandingan luasnya sama dengan perbandingan hasil kali sisi-sisi yang mengapit sudut itu.

Bukti. (1) Luas = $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$. (2) Luas = $\frac{1}{2}xy \sin \theta$ untuk sisi x, y yang mengapit sudut θ . □

✎ **CONTOH F6.5** Titik D pada BC dengan $BD : DC = 2 : 3$, dan E titik tengah AD . Tentukan perbandingan luas $[BDE] : [ABC]$.

Solusi. Segitiga ABD dan ABC setinggi (dari A), jadi $[ABD] = \frac{2}{5}[ABC]$. Segitiga BDE dan BDA setinggi (dari B ke garis AD), dan $DE = \frac{1}{2}DA$, jadi $[BDE] = \frac{1}{2}[ABD] = \frac{1}{5}[ABC]$. Perbandingannya $1 : 5$. ■

F6.8 Aturan sinus dan aturan kosinus

★ **TEOREMA F6.10** (*Aturan kosinus*) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ untuk setiap segitiga.

Bukti. Letakkan C di titik asal, $A = (b, 0)$, dan $B = (a \cos C, a \sin C)$. Rumus jarak: $c^2 = (a \cos C - b)^2 + a^2 \sin^2 C = a^2(\cos^2 C + \sin^2 C) - 2ab \cos C + b^2$. Bukti ini berlaku untuk sudut C lancip, siku-siku, maupun tumpul. □

★ **TEOREMA F6.11** (*Aturan sinus*) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Bukti. Luas segitiga dapat ditulis tiga cara: $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$. Bagi dengan $\frac{1}{2}abc$: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$. (Nilai bersamanya $\frac{1}{2R}$; bukti bagian ini memakai sudut keliling, Bab 12.) □

✎ **CONTOH F6.6** Pada segitiga dengan $a = 7$, $b = 8$, $\angle C = 60^\circ$, tentukan c dan $\sin A$.

Solusi. $c^2 = 49 + 64 - 2 \cdot 56 \cdot \frac{1}{2} = 57$, jadi $c = \sqrt{57}$. Aturan sinus: $\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{57}} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{57}} = \frac{7\sqrt{19}}{38}$. ■

F6.9 Geometri analitik dasar

★ **TEOREMA F6.12** (1) Garis melalui (x_0, y_0) dengan kemiringan m : $y - y_0 = m(x - x_0)$. Dua garis dengan kemiringan m_1, m_2 sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 m_2 = -1$. (2) Jarak titik (x_0, y_0) ke garis $ax + by + c = 0$ adalah $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. (3) Lingkaran berpusat (p, q) berjari-jari r : $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Bukti (2). Vektor (a, b) tegak lurus garis. Kaki tegak lurus dari $P_0 = (x_0, y_0)$ adalah $P_0 - t(a, b)$ untuk t yang membuatnya terletak pada garis: $a(x_0 - ta) + b(y_0 - tb) + c = 0$, jadi $t = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$. Jaraknya $|t|\sqrt{a^2 + b^2}$. □

🔍 **CONTOH F6.7** Tentukan jarak titik $(1, 2)$ ke garis $3x + 4y - 1 = 0$, dan persamaan garis melalui $(1, 2)$ yang tegak lurus garis itu.

Solusi. Jarak $\frac{|3+8-1|}{5} = 2$. Garis $3x + 4y - 1 = 0$ berkemiringan $-\frac{3}{4}$, jadi garis tegak lurusnya berkemiringan $\frac{4}{3}$: $y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1)$, atau $4x - 3y + 2 = 0$. ■

F6.10 Identitas trigonometri lanjutan

★ **TEOREMA F6.13** (1) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$. (2) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ dan $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. (3) Pada segitiga yang tidak siku-siku, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

Bukti. (1) Bagi rumus $\sin(\alpha \pm \beta)$ dengan $\cos(\alpha \pm \beta)$, lalu bagi pembilang dan penyebut dengan $\cos \alpha \cos \beta$. (2) Tulis $x = u + v$, $y = u - v$ dengan $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$. Maka $\sin x + \sin y = \sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v$, serupa untuk kosinus. (3) $A + B = 180^\circ - C$, jadi $\tan(A + B) = -\tan C$, yaitu $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$. Kalikan silang: $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$. □

🔍 **CONTOH F6.8** Buktikan pada setiap segitiga $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Solusi. Menurut (2), $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \sin \frac{A+B}{2}$, dengan kesamaan jika $A = B$. Dengan argumen yang sama untuk sudut C dan 60° : $\sin C + \sin 60^\circ \leq 2 \sin \frac{C+60^\circ}{2}$. Menjumlahkan dan memakai lagi (2): $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^\circ \leq 2 \left(\sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C+60^\circ}{2} \right) \leq 4 \sin \frac{A+B+C+60^\circ}{4} = 4 \sin 60^\circ$. Jadi jumlahnya $\leq 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, dengan kesamaan pada segitiga sama sisi. (Ini adalah pembuktian Jensen untuk fungsi $\sin$ yang konkaf pada $[0, \pi]$.) ■

Inti Bab

Mengejar sudut dimulai dari tiga fakta: sudut berpelurus, sudut pada garis sejajar, dan jumlah sudut segitiga. Kekongruenan membuktikan kesamaan panjang; kesebangunan membuktikan kesebandingan dan menghasilkan faktor k^2 untuk luas.

Pythagoras adalah akibat langsung kesebangunan pada garis tinggi ke sisi miring. Trigonometri mengubah sudut menjadi panjang; hafalkan nilai sudut istimewa dan rumus jumlah sudut, karena keduanya menjadi dasar aturan sinus dan kosinus di Bagian III.

Ketaksamaan segitiga dan prinsip “sisi lebih panjang berhadapan sudut lebih besar” adalah fakta paling dasar tentang ukuran. Perbandingan luas diperoleh dari tinggi yang sama atau sudut yang sama.

Aturan kosinus dibuktikan dengan koordinat untuk semua jenis sudut, aturan sinus dengan tiga cara menulis luas. Geometri analitik memberi rumus jarak titik ke garis dan persamaan lingkaran. Identitas jumlah-ke-hasil kali dan identitas tangen dalam segitiga adalah alat standar dalam soal trigonometri olimpiade.

Latihan

- F6.1** ★ Sudut dalam sebuah segi- n beraturan besarnya 144° . Tentukan n .
- F6.2** ★ Buktikan bahwa garis berat ke sisi miring segitiga siku-siku sama dengan setengah sisi miring.
- F6.3** ★ Hitung $\cos 75^\circ$, $\tan 15^\circ$, dan $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ$.
- F6.4** ★★ Pada segitiga sama kaki $AB = AC$ dengan $\angle A = 36^\circ$, garis bagi dari B memotong AC di D . Buktikan $BC = BD = AD$ lalu tentukan $\frac{AB}{BC}$.

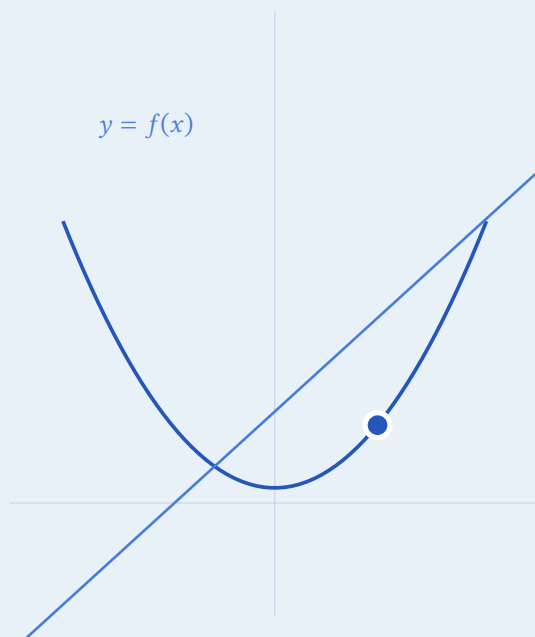
F6.5 ★★ Buktikan bahwa luas segitiga dengan dua sisi a, b dan sudut apit γ adalah $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$, lalu tentukan luas maksimum segitiga dengan $a = 5, b = 8$.

F6.6 ★★ Buktikan $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ dan gunakan untuk menunjukkan $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Aljabar

Ketaksamaan, polinomial, persamaan fungsional, barisan, dan aljabar simetris. Aljabar adalah bahasa yang dipakai hampir setiap soal olimpiade; lima bab ini mengajarkan tata bahasanya.





Ketaksamaan

Ketaksamaan adalah seni membandingkan tanpa menghitung. Kita jarang tahu nilai pasti sebuah ekspresi, tetapi sering dapat memastikan bahwa ekspresi itu tidak pernah lebih kecil dari sesuatu. Kemampuan inilah yang dibutuhkan di hampir setiap cabang olimpiade: untuk membatasi solusi persamaan, menaksir suku barisan, atau menutup sebuah kasus.

Di IMO, ketaksamaan jarang muncul telanjang, tetapi hampir selalu bekerja di balik layar. IMO 2020 Soal 2 diselesaikan oleh satu baris AM-GM berbobot; IMO 2023 Soal 4 oleh AM-GM yang dipakai dua langkah sekaligus; IMO 2022 Soal 2 oleh AM-GM di dalam persamaan fungsional. Bab ini membangun perkakas itu dari satu fakta sederhana, $x^2 \geq 0$, hingga Schur dan trik garis singgung.

© PETA BAB

Setelah mempelajari bab ini Anda mampu: (1) membuktikan ketaksamaan dengan menuliskannya sebagai jumlah kuadrat; (2) memakai AM-GM, Cauchy–Schwarz, dan bentuk Engel secara tepat, termasuk menentukan kasus kesamaan; (3) memakai ketaksamaan penyusunan ulang, Chebyshev, Jensen, dan trik garis singgung; (4) menghomogenkan ketaksamaan bersyarat dan memakai ketaksamaan Schur.

1.1 Kuadrat tidak pernah negatif

Hampir semua ketaksamaan klasik berakar pada satu fakta: $x^2 \geq 0$ untuk setiap bilangan real x , dengan kesamaan jika dan hanya jika $x = 0$. Menuliskan selisih kedua ruas sebagai jumlah kuadrat disebut teknik **SOS** (*sum of squares*).

 **CONTOH 1.1** Buktikan bahwa untuk semua bilangan real a, b, c berlaku $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Solusi. Kalikan selisihnya dengan 2:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b = c$. ■

 **CONTOH 1.2** Buktikan bahwa untuk $x, y > 0$ berlaku $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$.

Solusi. Samakan penyebut dan sederhanakan pembilangnya. Perhitungan langsung memberikan

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+xy} = \frac{xy(x-y)^2 + (1-xy)^2}{(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)}.$$

Pembilangnya adalah jumlah dua suku tak negatif dan penyebutnya positif, sehingga ketaksamaan terbukti. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $x = y$ dan $xy = 1$, yaitu $x = y = 1$. ■

Lema ini dipakai lagi pada Bab 21 untuk membuktikan sebuah ketaksamaan bersyarat $xyz = 1$.

1.2 Ketaksamaan AM–GM

★ **TEOREMA 1.1 (AM–GM)** Untuk bilangan real positif $a_1, a_2, \dots, a_n$ berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

dengan kesamaan jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bukti (Pólya). Fungsi $g(x) = e^{x-1} - x$ memiliki turunan $g'(x) = e^{x-1} - 1$, sehingga g turun pada $(-\infty, 1]$ dan naik pada $[1, \infty)$. Akibatnya $g(x) \geq g(1) = 0$, yaitu $x \leq e^{x-1}$,

dengan kesamaan hanya untuk $x = 1$. Misalkan A adalah rata-rata aritmetika. Terapkan fakta ini pada $x_i = a_i/A$, lalu kalikan:

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{A^n} = \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{A} \leq \prod_{i=1}^n e^{a_i/A-1} = e^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{A}-n} = e^0 = 1.$$

Jadi $a_1 \cdots a_n \leq A^n$. Kesamaan memerlukan $a_i/A = 1$ untuk semua i . □

 **CATATAN** AM-GM berbobot. Jika $w_1, \dots, w_n > 0$ dengan $w_1 + \cdots + w_n = 1$, maka $w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n}$. Bukti yang sama bekerja dengan $x_i^{w_i} \leq e^{w_i(x_i-1)}$. Bentuk ini dipakai pada IMO 2020 Soal 2 (Bab 36).

 **CONTOH 1.3** Untuk $a, b, c > 0$, buktikan $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Solusi. Dengan AM-GM dua suku, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, dan $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Ketiga ruas positif, sehingga boleh dikalikan: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a = b = c$. ■

 **CONTOH 1.4** Tentukan nilai minimum $x^2 + \frac{16}{x}$ untuk $x > 0$.

Solusi. Kita ingin hasil kali suku-suku yang dirata-ratakan bernilai konstan. Pecah $\frac{16}{x} = \frac{8}{x} + \frac{8}{x}$:

$$x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3\sqrt[3]{64} = 12.$$

Kesamaan terjadi saat $x^2 = \frac{8}{x}$, yaitu $x = 2$, dan memang $4 + 8 = 12$. Jadi nilai minimumnya 12. ■

 **STRATEGI** Sebelum memakai AM-GM, tebak dulu kapan kesamaan terjadi (biasanya saat semua variabel sama, atau di titik batas). Lalu pecah atau beri bobot suku-suku sehingga semua suku yang dirata-ratakan *bernilai sama* di titik kesamaan itu.

1.3 Cauchy–Schwarz dan bentuk Engel

★ **TEOREMA 1.2** (Cauchy–Schwarz) Untuk bilangan real $a_1, \dots, a_n$ dan $b_1, \dots, b_n$ berlaku

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2,$$

dengan kesamaan jika dan hanya jika kedua barisan sebanding.

Bukti. Identitas Lagrange memberikan

$$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) - \left(\sum a_ib_i\right)^2 = \sum_{i < j} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \geq 0. \quad \square$$

★ **AKIBAT 1.3** (bentuk Engel) Untuk bilangan real x_i dan bilangan positif y_i ,

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

Bukti. Terapkan Cauchy–Schwarz pada $a_i = x_i/\sqrt{y_i}$ dan $b_i = \sqrt{y_i}$. □

✎ **CONTOH 1.5** (Ketaksamaan Nesbitt) Untuk $a, b, c > 0$, buktikan $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Solusi. Tulis $\frac{a}{b+c} = \frac{a^2}{ab+ac}$ dan gunakan bentuk Engel:

$$\sum_{\text{siklis}} \frac{a^2}{ab+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}.$$

Langkah terakhir memakai $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, yang setara dengan Contoh 1.1. ■

✎ **CONTOH 1.6** (IMO 1995) Misalkan $a, b, c > 0$ dengan $abc = 1$. Buktikan

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solusi. Substitusikan $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, sehingga $xyz = 1$ dan $yz = \frac{1}{x}$. Maka

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}.$$

Dengan bentuk Engel lalu AM-GM,

$$\sum_{\text{siklis}} \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}.$$

1.4 Rantai rata-rata

★ **TEOREMA 1.4** (QM-AM-GM-HM) Untuk $a_1, \dots, a_n > 0$,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

dan setiap kesamaan terjadi jika dan hanya jika semua a_i sama.

Bukti. Ketaksamaan pertama adalah Cauchy-Schwarz dengan $b_i = 1$. Ketaksamaan kedua adalah AM-GM. Ketaksamaan ketiga adalah AM-GM untuk $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ yang kemudian dibalik. □

1.5 Penyusunan ulang dan Chebyshev

★ **TEOREMA 1.5** (Ketaksamaan penyusunan ulang) Misalkan $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq \dots \leq b_n$, dan σ sebuah permutasi dari $\{1, \dots, n\}$. Maka

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Bukti. Jika σ bukan identitas, ada $i < j$ dengan $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}$. Menukar kedua nilai itu mengubah jumlah sebesar $(a_j - a_i)(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)}) \geq 0$ dan mengurangi banyak inversi. Setelah berhingga langkah kita sampai pada susunan searah tanpa pernah menurunkan jumlah. Batas bawah dibuktikan dengan cara yang sama. □

★ **AKIBAT 1.6** (Chebyshev) Jika (a_i) dan (b_i) terurut searah, maka $n \sum a_i b_i \geq (\sum a_i)(\sum b_i)$.

Bukti. Jumlahkan ketaksamaan penyusunan ulang untuk n pergeseran siklis $\sigma_k(i) = i+k \pmod{n}$. □

 **CONTOH 1.7** Untuk $a, b, c > 0$, buktikan $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Solusi. Dengan AM-GM tiga suku, $\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geq a^2b$. Dua ketaksamaan serupa adalah $\frac{b^3+b^3+c^3}{3} \geq b^2c$ dan $\frac{c^3+c^3+a^3}{3} \geq c^2a$. Jumlahkan ketiganya. ■

1.6 Jensen dan trik garis singgung

★ **TEOREMA 1.7** (Jensen) Jika f konveks (cekung ke atas) pada selang I , maka untuk $x_1, \dots, x_n \in I$ berlaku $f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$. Untuk f konkaf, tandanya terbalik.

Sering kali fungsi yang muncul tidak konveks pada seluruh selang. Trik garis singgung mengatasinya: bandingkan $f(x)$ dengan garis singgungnya di titik kesamaan, lalu jumlahkan.

 **CONTOH 1.8** Misalkan $a, b, c > 0$ dengan $a + b + c = 1$. Buktikan $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{27}{10}$.

Solusi. Kesamaan diduga terjadi di $a = b = c = \frac{1}{3}$, dengan $f(\frac{1}{3}) = \frac{9}{10}$ untuk $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Garis singgung di $x = \frac{1}{3}$ adalah $y = \frac{54-27x}{50}$. Perhitungan langsung memberikan

$$\frac{54-27x}{50} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(3x-1)^2(4-3x)}{50(1+x^2)} \geq 0 \quad \text{untuk } 0 < x < \frac{4}{3}.$$

Karena $0 < a, b, c < 1$, ketiga ketaksamaan berlaku. Dengan menjumlahkannya,

$$\sum_{\text{siklis}} \frac{1}{1+a^2} \leq \frac{3 \cdot 54 - 27(a+b+c)}{50} = \frac{162-27}{50} = \frac{27}{10}. \quad \blacksquare$$

⚠ **AWAS** Trik garis singgung hanya sah bila ketaksamaan terhadap garis benar pada *seluruh* daerah nilai variabel. Selalu faktorkan selisihnya dan periksa tanda setiap faktor, seperti faktor $4-3x$ di atas.

1.7 Homogenisasi dan Schur

Ketaksamaan disebut **homogen** berderajat d jika mengganti (a, b, c) dengan (ta, tb, tc) mengalikan kedua ruas dengan t^d . Syarat seperti $a + b + c = 1$ memungkinkan kita mengubah ketaksamaan tak homogen menjadi homogen dengan menyisipkan faktor $(a + b + c)^k$ yang bernilai 1.

★ **TEOREMA 1.8** (Schur, $t = 1$) Untuk $a, b, c \geq 0$ berlaku $a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0$. Dengan $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, dan $r = abc$, ketaksamaan ini setara dengan $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$.

Bukti. Karena simetris, misalkan $a \geq b \geq c$. Suku ketiga $c(c - a)(c - b) \geq 0$. Dua suku pertama berjumlah $(a - b)[a(a - c) - b(b - c)]$, dan $a(a - c) \geq b(b - c) \geq 0$ karena $a \geq b$ dan $a - c \geq b - c \geq 0$. Jadi jumlahnya tak negatif. Bentuk p, q, r diperoleh dengan menjabarkan. □

🔍 **CONTOH 1.9** (IMO 1984) Misalkan $a, b, c \geq 0$ dengan $a + b + c = 1$. Buktikan $0 \leq ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$.

Solusi. Batas bawah. Dengan AM-GM, $(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 9abc$, sehingga $ab + bc + ca = (ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 9abc \geq 2abc$.

Batas atas. Dengan $p = 1$, yang harus dibuktikan adalah $q - 2r \leq \frac{7}{27}$. Schur memberi $1 - 4q + 9r \geq 0$, yaitu $r \geq \frac{4q-1}{9}$. Maka

$$q - 2r \leq q - \frac{2(4q-1)}{9} = \frac{q+2}{9} \leq \frac{\frac{1}{3}+2}{9} = \frac{7}{27},$$

karena $q \leq \frac{p^2}{3} = \frac{1}{3}$. Kesamaan terjadi pada $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

💡 **STRATEGI** Untuk ketaksamaan simetris tiga variabel dengan syarat, cobalah menulis semuanya dalam p, q, r . Ketaksamaan dasar $p^2 \geq 3q$, $q^2 \geq 3pr$, dan Schur $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ sering sudah cukup.

1.8 Studi kasus: dari coretan ke solusi

Bagian ini memperlihatkan bagaimana sebuah solusi *ditemukan*, bukan hanya bagaimana ia ditulis. Kita mengikuti jalan pikiran seorang peserta, termasuk langkah-langkah yang gagal.

 **CONTOH 1.10** Bilangan real tak negatif a, b, c memenuhi $a + b + c = 3$. Buktikan $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$.

Coretan pertama: cari kasus kesamaan. Di $a = b = c = 1$ ruas kiri bernilai $3 + 1 = 4$. Kesamaan! Coba juga titik batas: $(3, 0, 0)$ memberi 9, dan $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ memberi $\frac{9}{2}$. Jadi kesamaan tampaknya hanya di $(1, 1, 1)$, dan titik batas masih jauh dari 4. Ini kabar baik: ketaksamaannya tidak terlalu ketat di pinggir.

Percobaan kedua: AM-GM langsung. Kita tahu $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$. Tinggal $abc \geq 1$? Tidak: $abc \leq 1$ menurut AM-GM, arah yang salah. Suku abc bisa nol, sementara $a^2 + b^2 + c^2$ bisa tepat 3 hanya saat $abc = 1$. Kedua suku “saling menolong”, jadi keduanya tidak boleh diperkirakan secara terpisah.

Ide: pakai p, q, r . Ekspresinya simetris dengan syarat $p = a + b + c = 3$. Dengan $q = ab + bc + ca$ dan $r = abc$: $a^2 + b^2 + c^2 = 9 - 2q$. Yang harus dibuktikan menjadi $9 - 2q + r \geq 4$, yaitu $r \geq 2q - 5$. Sekarang kita butuh batas *bawah* untuk r dalam q , dan itulah persis yang diberikan Schur.

Solusi. Tulis $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Ketaksamaan setara dengan $r \geq 2q - 5$. Menurut Schur, $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, yaitu $27 - 12q + 9r \geq 0$, sehingga $r \geq \frac{4q}{3} - 3$. Cukup dibuktikan $\frac{4q}{3} - 3 \geq 2q - 5$, yaitu $q \leq 3$, dan ini benar karena $q \leq \frac{p^2}{3} = 3$. Kesamaan: $q = 3$ memaksa $a = b = c = 1$. ■

Refleksi. Dua pelajaran. Pertama, jika dua bagian ekspresi “bekerja berlawanan arah” (satu besar ketika yang lain kecil), jangan memperkirakannya secara terpisah. Kedua, begitu soal simetris diterjemahkan ke p, q, r , pertanyaannya sering menjadi “batas mana untuk r yang kita butuhkan?”, dan jawabannya hampir selalu AM-GM ($q^2 \geq 3pr$) atau Schur.

1.9 Wawasan sejarah dan konteks

Ketaksamaan rata-rata aritmetika dan geometrik untuk dua bilangan sudah dikenal geometer Yunani kuno sebagai fakta tentang lingkaran: tinggi yang ditarik ke diameter tidak pernah melebihi jari-jari. Augustin-Louis Cauchy menerbitkan ketaksamaan

yang kini menyandang namanya dalam *Cours d'analyse* (1821), bersama salah satu bukti klasik AM-GM dengan induksi maju-mundur. Versi integralnya dikaitkan dengan Viktor Bunyakovsky (1859) dan Hermann Schwarz (1888). Johan Jensen merumuskan ketaksamaan konveksitas pada 1906, dan Issai Schur memberi ketaksamaannya pada awal abad ke-20.

Di olimpiade modern, ketaksamaan murni lebih jarang muncul sebagai soal IMO dibanding dekade 1990-an, tetapi keterampilannya justru makin penting: hampir setiap soal aljabar dan banyak soal teori bilangan memerlukan satu langkah penaksiran yang tajam.

Inti Bab

Semua ketaksamaan klasik di bab ini bermuara pada dua gagasan: *kuadrat tak negatif* dan *kecekungan*. AM-GM, Cauchy–Schwarz, dan rantai rata-rata adalah cara-cara rapi untuk mengemas kedua gagasan itu.

Kebiasaan terpenting bukan menghafal nama ketaksamaan, melainkan *menebak kasus kesamaan lebih dulu*. Kasus kesamaan memberi tahu cara memecah suku (AM-GM), cara memilih bobot, dan garis singgung mana yang harus dipakai. Jika sebuah langkah merusak kasus kesamaan, langkah itu pasti terlalu kasar.

Untuk ketaksamaan simetris dengan syarat, terjemahkan ke p, q, r , untuk ketaksamaan siklis, ingat bahwa hanya rotasi, bukan pengurutan penuh, yang boleh diasumsikan.

Latihan

- 1.1 ★** Buktikan bahwa $x + \frac{1}{x} \geq 2$ untuk $x > 0$, lalu tentukan nilai minimum $\frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}$ untuk x real.
- 1.2 ★** Untuk $a, b, c > 0$, buktikan $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ dan $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.
- 1.3 ★** Untuk bilangan real a, b dengan $a + b = 2$, buktikan $a^4 + b^4 \geq 2$.
- 1.4 ★★** Misalkan $a, b, c > 0$ dengan $a + b + c = 3$. Buktikan $\frac{a^2}{a + b^2} + \frac{b^2}{b + c^2} + \frac{c^2}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}$.
- 1.5 ★★** Untuk $x, y, z > 0$ dengan $xyz = 1$, buktikan $x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z$.

1.6 ★★ Buktikan bahwa untuk $a, b, c > 0$ berlaku $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$.

1.7 ★★★ Misalkan $a, b, c \geq 0$ dengan $a + b + c = 3$. Buktikan $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$.

1.8 ★★★ Misalkan $a, b, c > 0$. Buktikan $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$. (IMO 2001)

Polinomial

Polinomial adalah objek yang ditentukan oleh sedikit informasi. Polinomial berderajat n ditentukan penuh oleh nilainya di $n + 1$ titik, oleh akar-akarnya dan koefisien utamanya, atau oleh sisa pembagiannya. Karena kekakuan inilah polinomial menjadi alat yang sangat tajam: sedikit informasi yang diketahui sering cukup untuk mengunci seluruh jawaban.

Bab ini melatih tiga refleksi: memandang nilai sebagai sisa pembagian, memandang akar sebagai koefisien (Vieta), dan membentuk polinomial bantu yang bernilai nol di titik-titik yang diketahui. Refleksi ketiga saja sudah menyelesaikan soal USAMO 1975 di bab ini dan memberi jalan masuk ke soal-soal seperti IMO 2023 Soal 3.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai teorema sisa dan teorema faktor; (2) menghubungkan akar dan koefisien melalui rumus Vieta; (3) memanfaatkan sifat keterbagian polinomial berkoefisien bulat; (4) memakai interpolasi Lagrange dan argumen derajat; (5) memakai akar satuan untuk menyaring koefisien.

2.1 Pembagian, teorema sisa, dan teorema faktor

★ **TEOREMA 2.1** (*Algoritma pembagian*) Untuk polinomial P dan polinomial tak nol D (koefisien real), ada tepat satu pasangan polinomial Q, S dengan $P = DQ + S$ dan $S = 0$ atau $\deg S < \deg D$.

★ **AKIBAT 2.2** (*Teorema sisa dan teorema faktor*) Sisa pembagian $P(x)$ oleh $x - a$ adalah $P(a)$. Akibatnya $x - a$ membagi $P(x)$ jika dan hanya jika $P(a) = 0$.

Bukti. Dengan $D = x - a$ diperoleh $P(x) = (x - a)Q(x) + s$ dengan s konstanta. Substitusi $x = a$ memberi $s = P(a)$. □

✎ **CONTOH 2.1** Tentukan sisa pembagian x^{100} oleh $x^2 - 1$.

Solusi. Sisanya berderajat paling tinggi 1: $x^{100} = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$. Substitusi $x = 1$ memberi $1 = a + b$, dan $x = -1$ memberi $1 = -a + b$. Jadi $a = 0, b = 1$, dan sisanya 1. ■

✎ **CONTOH 2.2** Polinomial P bersisa 3 bila dibagi $x - 1$ dan bersisa 5 bila dibagi $x - 2$. Tentukan sisanya bila dibagi $(x - 1)(x - 2)$.

Solusi. Tulis $P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$. Maka $P(1) = a + b = 3$ dan $P(2) = 2a + b = 5$, sehingga $a = 2, b = 1$. Sisanya $2x + 1$. ■

2.2 Rumus Vieta

★ **TEOREMA 2.3** (*Vieta*) Jika $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ dengan $a_n \neq 0$ memiliki akar-akar $r_1, \dots, r_n$ (dihitung dengan kelipatannya, di $\mathbb{C}$), maka

$$\sum_i r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{i < j} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \dots, \quad r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Bukti. Bandingkan koefisien pada $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$. □

 **CONTOH 2.3** Misalkan α, β akar-akar $x^2 - 5x + 3 = 0$. Hitung $\alpha^2 + \beta^2$ dan $\alpha^3 + \beta^3$ tanpa mencari akarnya.

Solusi. Dari Vieta, $\alpha + \beta = 5$ dan $\alpha\beta = 3$. Maka $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 6 = 19$ dan $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 125 - 45 = 80$. ■

2.3 Polinomial berkoefisien bulat

 **LEMA 2.4** Jika P berkoefisien bulat dan a, b bilangan bulat berbeda, maka $a - b \mid P(a) - P(b)$.

Bukti. Untuk setiap $k \geq 1$, $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$. Jadi setiap suku $c_k(a^k - b^k)$ habis dibagi $a - b$. □

 **CONTOH 2.4** Adakah polinomial berkoefisien bulat P dengan $P(1) = 2$ dan $P(3) = 5$?

Solusi. Tidak ada. Menurut lema, $3 - 1 = 2$ harus membagi $P(3) - P(1) = 3$, padahal $2 \nmid 3$. ■

 **TEOREMA 2.5** (Uji akar rasional) Jika $\frac{p}{q}$ dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$ adalah akar polinomial berkoefisien bulat $a_n x^n + \dots + a_0$, maka $p \mid a_0$ dan $q \mid a_n$.

Bukti. Kalikan $P(p/q) = 0$ dengan q^n : $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n = 0$. Semua suku kecuali $a_0 q^n$ habis dibagi p , sehingga $p \mid a_0 q^n$, dan karena $\text{FPB}(p, q) = 1$, $p \mid a_0$. Dengan cara serupa $q \mid a_n p^n$, sehingga $q \mid a_n$. □

2.4 Argumen derajat dan interpolasi

 **TEOREMA 2.6** Polinomial tak nol berderajat n memiliki paling banyak n akar. Akibatnya, dua polinomial berderajat paling tinggi n yang bernilai sama di $n + 1$ titik berbeda adalah identik.

★ **TEOREMA 2.7** (*Interpolasi Lagrange*) Untuk titik-titik $x_0, \dots, x_n$ yang berbeda dan nilai $y_0, \dots, y_n$, polinomial tunggal berderajat paling tinggi n dengan $P(x_i) = y_i$ adalah

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

🔍 **CONTOH 2.5** (USAMO 1975) Polinomial P berderajat n memenuhi $P(k) = \frac{k}{k+1}$ untuk $k = 0, 1, \dots, n$. Tentukan $P(n+1)$.

Solusi. Pertimbangkan $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Polinomial ini berderajat $n+1$ dan bernilai nol di $x = 0, 1, \dots, n$, sehingga $Q(x) = cx(x-1)\cdots(x-n)$ untuk suatu konstanta c . Substitusi $x = -1$ memberi $Q(-1) = 1$, sedangkan ruas kanan bernilai $c(-1)^{n+1}(n+1)!$. Jadi $c = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Substitusi $x = n+1$:

$$(n+2)P(n+1) - (n+1) = c(n+1)! = (-1)^{n+1},$$

sehingga

$$P(n+1) = \frac{n+1 + (-1)^{n+1}}{n+2}.$$

Sebagai pemeriksaan, untuk n ganjil diperoleh $P(n+1) = 1$, dan untuk n genap $P(n+1) = \frac{n}{n+2}$. ■

💡 **STRATEGI** Jika sebuah polinomial diketahui nilainya di banyak titik, bentuklah polinomial baru yang bernilai nol di titik-titik itu, lalu tulis sebagai hasil kali faktor-faktor linear dikali konstanta. Konstantanya ditentukan dari satu titik lain.

🔍 **CONTOH 2.6** Tentukan semua polinomial real P dengan $P(x^2) = P(x)^2$ untuk semua x .

Solusi. Jelas $P \equiv 0$ memenuhi. Misalkan $P \neq 0$ dan tulis $P(x) = x^m Q(x)$ dengan $Q(0) \neq 0$. Persamaan menjadi $x^{2m} Q(x^2) = x^{2m} Q(x)^2$, jadi $Q(x^2) = Q(x)^2$. Substitusi $x = 0$ memberi $Q(0) = Q(0)^2$, sehingga $Q(0) = 1$. Andaikan Q tidak konstan; tulis $Q(x) = 1 + cx^k + (\text{suku berderajat } > k)$ dengan $c \neq 0$. Koefisien x^k di $Q(x^2)$ adalah 0 (karena suku terendah setelah 1 adalah cx^{2k}), sedangkan koefisien x^k di $Q(x)^2$ adalah $2c \neq 0$. Kontradiksi. Jadi $Q \equiv 1$ dan $P(x) = x^m$. Semua jawaban: $P \equiv 0$ dan $P(x) = x^m$ untuk $m \geq 0$. ■

2.5 Akar satuan sebagai penyaring

Misalkan $\omega = e^{2\pi i/3}$, sehingga $\omega^3 = 1$ dan $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Untuk bilangan bulat k , $1 + \omega^k + \omega^{2k}$ bernilai 3 jika $3 \mid k$ dan 0 jika tidak.

 **CONTOH 2.7** Hitung $S = \binom{2026}{0} + \binom{2026}{3} + \binom{2026}{6} + \cdots + \binom{2026}{2025}$.

Solusi. Dengan $f(x) = (1+x)^{2026} = \sum_k \binom{2026}{k} x^k$, sifat di atas memberi $S = \frac{f(1)+f(\omega)+f(\omega^2)}{3}$. Karena $1 + \omega = -\omega^2 = e^{i\pi/3}$, diperoleh $f(\omega) = e^{2026\pi i/3}$ dan $f(\omega^2) = \overline{f(\omega)}$, sehingga $f(\omega) + f(\omega^2) = 2 \cos \frac{2026\pi}{3} = 2 \cos \frac{4\pi}{3} = -1$ (karena $2026 = 6 \cdot 337 + 4$). Jadi $S = \frac{2^{2026} - 1}{3}$. ■

2.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 2.8** Polinomial berderajat 3 memenuhi $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3$, dan $P(4) = 5$. Tentukan $P(5)$.

Coretan pertama: interpolasi langsung. Kita bisa menulis $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dan menyelesaikan sistem empat persamaan empat variabel. Itu berhasil, tetapi lambat dan rawan salah hitung. Seorang peserta yang berpengalaman berhenti sejenak dan bertanya: *apa yang istimewa dari data ini?*

Pengamatan. Tiga nilai pertama memenuhi $P(k) = k$. Seandainya $P(4) = 4$ juga, polinomial $P(x) - x$ yang berderajat paling tinggi 3 akan memiliki empat akar, sehingga $P(x) = x$. Data keempat “merusak” pola dengan selisih 1. Ini mengarah ke polinomial bantu.

Ide. Pandang $Q(x) = P(x) - x$. Polinomial ini berderajat 3 dan bernilai nol di 1, 2, 3, jadi $Q(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$.

Solusi. $Q(x) = P(x) - x$ berderajat 3 dengan akar 1, 2, 3, jadi $Q(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$ untuk suatu konstanta c . Dari $Q(4) = 5 - 4 = 1$ diperoleh $6c = 1$, $c = \frac{1}{6}$. Maka $P(5) = 5 + Q(5) = 5 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6} = 9$. ■

Refleksi. Polanya selalu sama: jika sebuah polinomial “hampir” sama dengan sesuatu yang sederhana di banyak titik, kurangkan yang sederhana itu dan faktorkan akar-

akarnya. Soal USAMO 1975 di bab ini adalah versi yang lebih canggih dari gagasan yang sama, dengan $(x + 1)P(x) - x$ sebagai polinomial bantu.

2.7 Wawasan sejarah dan konteks

François Viète (1540–1603) adalah salah satu matematikawan pertama yang memakai huruf untuk koefisien, dan hubungan antara akar dan koefisien kini dinamai menurut namanya. Rumus interpolasi yang kita sebut “Lagrange” sebenarnya sudah diterbitkan Edward Waring pada 1779, sebelum Joseph-Louis Lagrange (1795). Teorema dasar aljabar, yang menjamin setiap polinomial kompleks berderajat n memiliki n akar, dibuktikan secara memuaskan pada awal abad ke-19, dengan kontribusi penting Carl Friedrich Gauss.

Di IMO, polinomial sering muncul sebagai alat dalam soal lain: di teori bilangan melalui $a - b \mid P(a) - P(b)$, di kombinatorika melalui fungsi pembangkit, dan di aljabar melalui argumen derajat.

Inti Bab

Tiga ide menopang seluruh bab: *teorema sisa*, *rumus Vieta*, dan *argumen derajat* (polinomial tak nol berderajat n memiliki paling banyak n akar).

Untuk polinomial berkoefisien bulat, fakta $a - b \mid P(a) - P(b)$ adalah senjata utama; ia mengubah pertanyaan tentang nilai menjadi pertanyaan keterbagian. Untuk polinomial yang diketahui nilainya di banyak titik, bentuk polinomial bantu yang bernilai nol di titik-titik itu.

Akar satuan adalah penyaring: dengan merata-ratakan $f(1)$, $f(\omega)$, $f(\omega^2)$, kita dapat mengambil hanya koefisien yang indeksnya kelipatan 3.

Latihan

2.1 ★ Tentukan sisa pembagian x^{2026} oleh $x^2 + x + 1$.

2.2 ★ Misalkan α, β, γ akar-akar $x^3 - 3x^2 + x + 1$. Hitung $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

2.3 ★ Polinomial berkoefisien bulat P memenuhi: $P(0)$ dan $P(1)$ keduanya ganjil. Buktikan P tidak memiliki akar bulat.

- 2.4 ★** Tentukan semua polinomial P dengan $P(0) = 0$ dan $P(x + 1) - P(x) = 2x + 1$ untuk semua x .
- 2.5 ★★** Polinomial P berderajat n memenuhi $P(k) = 2^k$ untuk $k = 0, 1, \dots, n$. Tentukan $P(n + 1)$.
- 2.6 ★★** Buktikan tidak ada polinomial berkoefisien bulat P dan bilangan bulat berbeda a, b, c dengan $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.
- 2.7 ★★** Buktikan bahwa jika polinomial monik berkoefisien bulat memiliki akar rasional, akar itu bulat. Gunakan untuk membuktikan $\sqrt[3]{2}$ irasional.
- 2.8 ★★★** Misalkan $n > 1$. Buktikan $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ tidak dapat difaktorkan menjadi hasil kali dua polinomial berkoefisien bulat berderajat positif. (IMO 1993)

Persamaan Fungsional

Persamaan fungsional menguji disiplin berpikir, bukan pengetahuan. Hampir tidak ada teorema yang perlu dihafal; yang dibutuhkan adalah kemampuan memilih substitusi yang menghasilkan informasi, mencatat setiap fakta yang diperoleh, dan menyusunnya menjadi bukti yang tidak bocor.

Jenis soal ini sangat sering muncul di IMO: 2017 Soal 2, 2019 Soal 1, 2022 Soal 2, 2024 Soal 6, dan 2026 Soal 5 semuanya persamaan atau ketaksamaan fungsional. Kabar baiknya, soal-soal nomor 1 dan 2 dari jenis ini dapat diselesaikan penuh dengan teknik di bab ini. Kabar buruknya, satu kelalaian kecil, seperti lupa memeriksa jawaban atau jebakan titik demi titik, cukup untuk kehilangan poin.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memilih substitusi yang menghasilkan informasi; (2) membuktikan injektivitas, surjektivitas, dan memakainya; (3) menyelesaikan persamaan Cauchy di $\mathbb{Q}$ dan di $\mathbb{R}$ dengan syarat keteraturan; (4) menangani fungsi pada bilangan asli dengan induksi; (5) menulis solusi lengkap, termasuk memeriksa kembali semua jawaban.

3.1 Substitusi dasar

Persamaan fungsional adalah persamaan yang tak diketahuinya berupa fungsi. Langkah pertama hampir selalu mencoba nilai khusus: 0 , 1 , $x = y$, $y = -x$, atau substitusi yang membuat suatu argumen sama dengan argumen lain.

 **CONTOH 3.1** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) + 2f(1-x) = x^2$ untuk semua x .

Solusi. Ganti x dengan $1-x$: $f(1-x) + 2f(x) = (1-x)^2$. Dari dua persamaan ini, kalikan yang kedua dengan 2 lalu kurangi yang pertama:

$$3f(x) = 2(1-x)^2 - x^2 = x^2 - 4x + 2, \quad \text{jadi} \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3}.$$

Pemeriksaan: $f(x) + 2f(1-x) = \frac{(x^2 - 4x + 2) + 2(x^2 + 2x - 1)}{3} = x^2$. Jadi fungsi ini satu-satunya solusi. ■

 **CONTOH 3.2** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ untuk semua x, y .

Solusi. Dengan $x = y = 0$ diperoleh $f(0)^2 - f(0) = 0$, jadi $f(0) \in \{0, 1\}$. Jika $f(0) = 0$, substitusi $y = 0$ memberi $0 = x$ untuk semua x , mustahil. Jadi $f(0) = 1$, dan substitusi $y = 0$ memberi $f(x) - 1 = x$, yaitu $f(x) = x + 1$. Pemeriksaan: $(x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$. ■

 **AWAS** Solusi persamaan fungsional belum lengkap sebelum Anda *memeriksa* bahwa setiap fungsi yang ditemukan memang memenuhi persamaan. Kelalaian ini adalah penyebab kehilangan satu poin yang paling umum.

3.2 Injektif, surjektif, dan titik tetap

 **DEFINISI 3.1** Fungsi f **injektif** jika $f(a) = f(b)$ mengakibatkan $a = b$; **surjektif** jika setiap nilai di daerah kawan tercapai; **bijektif** jika keduanya.

 **STRATEGI** Jika suatu variabel muncul *sendirian* di satu ruas (misalnya $\dots = f(x) + y$), fungsi biasanya surjektif. Jika $f(a) = f(b)$ dapat disisipkan ke dalam persamaan sehingga menghasilkan $a = b$, fungsi injektif. Injektivitas memungkinkan kita “mencoret” f .

 **CONTOH 3.3** Tentukan semua $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ dengan $f(x + f(y)) = f(x) + y$ untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}$.

Solusi. *Injektif.* Jika $f(a) = f(b)$, maka $f(x) + a = f(x + f(a)) = f(x + f(b)) = f(x) + b$, jadi $a = b$.

$f(0) = 0$. Dengan $y = 0$: $f(x + f(0)) = f(x)$, dan injektivitas memberi $x + f(0) = x$.

Involusi. Dengan $x = 0$: $f(f(y)) = y$.

Aditif. Dengan $x = f(z)$: $f(f(z) + f(y)) = f(f(z)) + y = z + y = f(f(z + y))$. Karena injektif, $f(z) + f(y) = f(z + y)$ untuk semua $y, z \in \mathbb{Q}$.

Menurut Teorema 3.2 di bawah, $f(x) = cx$ dengan $c = f(1)$. Lalu $f(f(y)) = c^2y = y$ memaksa $c = \pm 1$. Kedua fungsi $f(x) = x$ dan $f(x) = -x$ memenuhi: $f(x + f(y)) = x + y$ dan $f(x - y) = -x + y$. ■

3.3 Persamaan Cauchy

★ **TEOREMA 3.2** Jika $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}$, maka $f(x) = cx$ dengan $c = f(1)$.

Bukti. Dari $x = y = 0$ diperoleh $f(0) = 0$, dan dari $y = -x$ diperoleh $f(-x) = -f(x)$. Dengan induksi, $f(nx) = nf(x)$ untuk $n \in \mathbb{N}$, sehingga berlaku juga untuk semua $n \in \mathbb{Z}$. Untuk $x = \frac{p}{q}$ dengan $q \in \mathbb{N}$: $qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1)$, jadi $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}c$. □

★ **TEOREMA 3.3** Jika $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aditif dan monoton (atau kontinu, atau terbatas pada suatu selang), maka $f(x) = cx$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Bukti untuk kasus monoton naik. Menurut teorema sebelumnya $f(r) = cr$ untuk $r \in \mathbb{Q}$, dan $c = f(1) \geq f(0) = 0$. Untuk x real dan bilangan rasional $r < x < s$, monotonitas memberi $cr \leq f(x) \leq cs$. Dengan mendekatkan r dan s ke x , diperoleh $f(x) = cx$. □

 **AWAS** Tanpa syarat keteraturan, persamaan Cauchy di $\mathbb{R}$ memiliki solusi “liar” yang tidak linear. Jangan pernah menyimpulkan $f(x) = cx$ di $\mathbb{R}$ hanya dari aditivitas.

3.4 Fungsi pada bilangan asli

Untuk $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, alat utamanya adalah induksi, sifat urutan bilangan asli, dan fakta bahwa setiap himpunan bilangan asli yang tak kosong memiliki anggota terkecil.

 **CONTOH 3.4** (IMO 1977) Fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ memenuhi $f(n+1) > f(f(n))$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Buktikan $f(n) = n$ untuk semua n .

Solusi. Langkah 1: $f(m) \geq n$ untuk semua $m \geq n$. Kita buktikan dengan induksi pada n . Untuk $n = 1$ jelas. Misalkan pernyataan benar untuk n , dan ambil $m \geq n + 1$. Maka $m - 1 \geq n$, sehingga $f(m - 1) \geq n$. Menerapkan hipotesis pada bilangan $f(m - 1) \geq n$ memberi $f(f(m - 1)) \geq n$. Akibatnya $f(m) > f(f(m - 1)) \geq n$, yaitu $f(m) \geq n + 1$.

Langkah 2: f naik tegas. Dari Langkah 1 dengan $m = n$, $f(n) \geq n$ untuk semua n . Menerapkannya pada bilangan $f(n)$ memberi $f(f(n)) \geq f(n)$. Maka $f(n + 1) > f(f(n)) \geq f(n)$.

Langkah 3. Karena f naik tegas, $f(a) > f(b)$ mengakibatkan $a > b$. Dari $f(n + 1) > f(f(n))$ diperoleh $n + 1 > f(n)$, yaitu $f(n) \leq n$. Bersama $f(n) \geq n$, diperoleh $f(n) = n$. ■

 **STRATEGI** Untuk fungsi pada $\mathbb{N}$, carilah ketaksamaan yang dapat diperkuat dengan induksi. Pernyataan induksi yang “lebih kuat” (seperti “untuk semua $m \geq n$ ” pada Langkah 1) sering lebih mudah dibuktikan daripada pernyataan aslinya.

3.5 Kerangka penulisan solusi

Solusi persamaan fungsional yang baik biasanya berbentuk: (1) tebak dan nyatakan jawaban; (2) periksa bahwa jawaban memenuhi; (3) buktikan tidak ada solusi lain melalui rangkaian klaim bernomor, masing-masing dengan substitusi yang disebut eksplisit, misalnya “ $P(x, 0)$ ” untuk substitusi $y = 0$ ke persamaan $P(x, y)$.

 **AWAS** Jebakan titik demi titik. Dari $f(x)^2 = x^2$ untuk semua x hanya dapat disimpulkan bahwa untuk setiap x , $f(x) = x$ atau $f(x) = -x$. Pilihan tanda dapat berbeda untuk x yang berbeda. Anda harus membuktikan secara terpisah bahwa campuran tanda tidak mungkin.

3.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 3.5** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x - f(y)) = 1 - x - y$ untuk semua x, y .

Coretan pertama. Substitusi $x = 0$ memberi $f(-f(y)) = 1 - y$. Menarik, tetapi masih ada f bersarang. Substitusi $y = 0$ memberi $f(x - f(0)) = 1 - x$: ini sudah hampir menentukan f ! Jika $c = f(0)$, maka $f(t) = 1 - (t + c) = 1 - c - t$ untuk semua t (dengan $t = x - c$).

Jalur yang lebih bersih. Peserta lain melihat struktur ruas kiri: argumen $x - f(y)$ akan menjadi 0 jika $x = f(y)$. Substitusi yang “membunuh” argumen sering paling produktif, karena mengubah f (sesuatu rumit) menjadi $f(0)$, sebuah konstanta.

Solusi. Misalkan $c = f(0)$. Substitusi $x = f(y)$: $c = 1 - f(y) - y$, jadi $f(y) = 1 - c - y$ untuk semua y . Khususnya $c = f(0) = 1 - c$, sehingga $c = \frac{1}{2}$ dan $f(x) = \frac{1}{2} - x$. Pemeriksaan: $f(x - \frac{1}{2} + y) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y = 1 - x - y$. ■

Refleksi. Tiga refleksi yang terlihat di sini: (1) coba substitusi yang membuat argumen f menjadi 0 atau menjadi sama dengan argumen lain; (2) begitu f terbukti linear, substitusikan kembali untuk menentukan konstanta; (3) selalu periksa jawaban. Di soal yang lebih sulit, langkah (1) mungkin memerlukan surjektivitas terlebih dahulu agar nilai $f(y)$ yang diinginkan memang tersedia.

3.7 Wawasan sejarah dan konteks

Augustin-Louis Cauchy mempelajari persamaan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pada 1821 dan membuktikan bahwa solusi yang kontinu adalah $f(x) = cx$. Pada 1905 Georg Hamel menunjukkan, dengan memakai basis $\mathbb{R}$ sebagai ruang vektor atas $\mathbb{Q}$ (yang keberadaannya memerlukan aksioma pilihan), bahwa ada solusi lain yang sangat tidak teratur: grafiknya padat di seluruh bidang. Karena itulah soal olimpiade selalu memberi syarat tambahan, atau menyusun persamaan sehingga keteraturan dapat dibuktikan.

Persamaan fungsional menjadi salah satu jenis soal IMO yang paling khas pada paruh kedua abad ke-20, dan sampai sekarang hampir setiap tahun ada setidaknya satu soal bertipe ini, baik di aljabar maupun di teori bilangan.

Inti Bab

Pola kerja persamaan fungsional selalu sama: *tebak jawaban, periksa, lalu kumpulkan fakta* melalui substitusi yang disebut eksplisit ($P(x, 0)$, $P(0, y)$, $P(x, x)$, dan seterusnya).

Injektivitas memungkinkan kita mencoret f ; surjektivitas memungkinkan kita memilih nilai f yang kita inginkan. Persamaan Cauchy adalah tujuan akhir yang sering: begitu f terbukti aditif dan monoton (atau kontinu), f linear.

Dua kesalahan paling mahal: tidak memeriksa jawaban, dan menyimpulkan “ $f(x) = x$ untuk semua x ” dari “ $f(x) = \pm x$ untuk setiap x ”.

Latihan

- 3.1 ★** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $2f(x) + f(-x) = x^3 + 3$ untuk semua x .
- 3.2 ★** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$.
- 3.3 ★** Buktikan tidak ada $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(f(n)) = n + 1$ untuk semua n .
- 3.4 ★★** Tentukan semua fungsi kontinu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$.
- 3.5 ★★** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(xf(y) + x) = xy + f(x)$ untuk semua x, y .
- 3.6 ★★** Tentukan semua $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dengan $f(m+n) = f(m) + f(n)$ untuk semua m, n , lalu semua $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang naik tegas dengan $f(2) = 2$ dan $f(mn) = f(m)f(n)$ untuk semua m, n .
- 3.7 ★★★** Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$. (IMO 1992)
- 3.8 ★★★** Tentukan semua $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$. (IMO 2019; pembahasan di Bab 35)

Barisan dan Rekurensi

Barisan adalah fungsi yang hidup di bilangan asli. Karena domainnya diskret, kita dapat memakai induksi, teleskopik, dan keperiodikan, alat-alat yang tidak tersedia untuk fungsi real biasa. Sebaliknya, barisan tak linear sering tidak memiliki rumus, dan satu-satunya jalan adalah menaksir.

Soal barisan di IMO biasanya berbentuk “buktikan barisan akhirnya konstan” atau “akhirnya periodik” (IMO 2018 Soal 5, IMO 2024 Soal 3, IMO 2026 Soal 6), atau “tentukan semua suku awal yang membuat barisan berperilaku baik” (IMO 2017 Soal 1). Bab ini membekali Anda dengan kedua sisi: rumus eksplisit ketika tersedia, dan penaksiran tajam ketika tidak.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menyelesaikan rekurensi linear dengan persamaan karakteristik; (2) menjumlahkan deret dengan teknik teleskopik; (3) mendeteksi dan membuktikan keperiodikan; (4) memakai identitas Fibonacci; (5) menaksir suku barisan tak linear dengan batas atas dan batas bawah yang cukup ketat.

4.1 Rekurensi linear

★ **TEOREMA 4.1** Misalkan $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ dengan $q \neq 0$, dan $x^2 - px - q = 0$ memiliki akar α, β .

(1) Jika $\alpha \neq \beta$, maka $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ untuk konstanta A, B .

(2) Jika $\alpha = \beta$, maka $a_n = (A + Bn)\alpha^n$.

Konstanta A, B ditentukan oleh a_0 dan a_1 .

Bukti. Kedua bentuk memenuhi rekurensi. Contohnya, $\alpha^{n+2} = p\alpha^{n+1} + q\alpha^n$ karena $\alpha^2 = p\alpha + q$; dan untuk akar kembar $\alpha = p/2$, $q = -\alpha^2$, dapat diperiksa bahwa $n\alpha^n$ juga solusi. Sistem untuk A, B dari a_0, a_1 selalu memiliki penyelesaian tunggal (determinannya $\beta - \alpha \neq 0$ atau $\alpha \neq 0$). Karena barisan ditentukan secara tunggal oleh a_0, a_1 , rumus tersebut adalah satu-satunya. $\square$

 **CONTOH 4.1** Tentukan rumus eksplisit a_n jika $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, dan $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

Solusi. Persamaan karakteristik $x^2 - 5x + 6 = 0$ memiliki akar 2 dan 3, sehingga $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$. Dari $A + B = 1$ dan $2A + 3B = 4$ diperoleh $B = 2$, $A = -1$. Jadi $a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$. Pemeriksaan: $a_2 = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 14 = 18 - 4$. $\blacksquare$

 **CONTOH 4.2** Tentukan a_n jika $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, dan $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

Solusi. Akar karakteristiknya kembar, $x = 2$, sehingga $a_n = (A + Bn)2^n$. Dari $a_0 = A = 1$ dan $a_1 = 2(1 + B) = 4$ diperoleh $B = 1$. Jadi $a_n = (n + 1)2^n$. Pemeriksaan: $a_2 = 16 - 4 = 12 = 3 \cdot 4$. $\blacksquare$

4.2 Teleskopik

Deret $\sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k)$ sama dengan $b_{n+1} - b_1$: semua suku di tengah saling menghapus. Seninya adalah menemukan b_k .

 **CONTOH 4.3** Hitung $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Solusi. Perhatikan $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$. Maka

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

 **CONTOH 4.4** Hitung $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Solusi. $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$. Hasil kali $\prod \frac{k-1}{k}$ bernilai $\frac{1}{n}$ dan $\prod \frac{k+1}{k}$ bernilai $\frac{n+1}{2}$, sehingga hasilnya $\frac{n+1}{2n}$. ■

4.3 Keperiodikan

 **CONTOH 4.5** Barisan $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$. Tentukan x_{2026} .

Solusi. Untuk $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$,

$$f(f(x)) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}, \quad \text{sehingga} \quad f^4(x) = -\frac{1}{-1/x} = x.$$

Barisan berperiode 4: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{3}$, $x_5 = 2$. Karena $2026 \equiv 2 \pmod{4}$, $x_{2026} = x_2 = -3$. ■

 **CATATAN** Rekurensi $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ selalu berperiode 6: dari (a, b) diperoleh $b - a, -a, -b, a - b, a, b, \dots$

4.4 Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci didefinisikan oleh $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Dari teorema rekurensi linear diperoleh *rumus Binet* $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ dengan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

 **TEOREMA 4.2** Untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 0$:

- (1) $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$;
- (2) $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ untuk $n \geq 1$ (*identitas Cassini*);
- (3) $\text{FPB}(F_m, F_n) = F_{\text{FPB}(m,n)}$.

Bukti. (1) Induksi pada n : untuk $n = 0, 1$ jelas, dan kedua ruas memenuhi rekurensi Fibonacci dalam n . (2) Dengan matriks $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diperoleh $M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$; ambil determinan kedua ruas. (3) Dari (2), $\text{FPB}(F_n, F_{n+1}) = 1$. Dari (1) dengan m diganti $m - n$: $F_m = F_{m-n}F_{n+1} + F_{m-n-1}F_n$, sehingga $\text{FPB}(F_m, F_n) = \text{FPB}(F_{m-n}F_{n+1}, F_n) = \text{FPB}(F_{m-n}, F_n)$. Ini persis langkah algoritma Euclid pada indeks, yang berakhir di $F_{\text{FPB}(m,n)}$. $\square$

4.5 Menaksir barisan tak linear

 **CONTOH 4.6** Barisan $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Tentukan $\lfloor a_{2026} \rfloor$.

Solusi. Kuadratkan rekurensi: $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$. Menjumlahkan dari $n = 1$ sampai 2025 memberi

$$a_{2026}^2 = 1 + 2 \cdot 2025 + \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{a_k^2} = 4051 + \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{a_k^2}.$$

Batas bawah. $a_{2026}^2 > 4051 > 3969 = 63^2$.

Batas atas. Dari $a_{k+1}^2 \geq a_k^2 + 2$ dan $a_1^2 = 1$ diperoleh $a_k^2 \geq 2k - 1$. Jadi $\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{a_k^2} \leq \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{2k-1} \leq \sum_{j=1}^{4095} \frac{1}{j}$. Kelompokkan $j \in [2^i, 2^{i+1})$ untuk $i = 0, 1, \dots, 11$; setiap kelompok berjumlah paling banyak $2^i \cdot \frac{1}{2^i} = 1$, sehingga jumlahnya paling banyak 12. Maka $a_{2026}^2 \leq 4063 < 4096 = 64^2$.

Jadi $63 < a_{2026} < 64$ dan $\lfloor a_{2026} \rfloor = 63$. $\blacksquare$

 **STRATEGI** Untuk barisan seperti $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, carilah besaran (di sini a_n^2) yang bertambah hampir konstan setiap langkah. Batas kasar dipakai untuk mengendalikan suku sisa, lalu batas yang lebih baik diperoleh dengan menyubstitusikan balik.

4.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 4.7** Barisan $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Buktikan $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$ untuk setiap n .

Coretan pertama: hitung. $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 43, a_5 = 1807$. Jumlah kebalikannya: $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{41}{42}, \frac{1805}{1806}$. Polanya mencolok: penyebut jumlah parsial adalah $a_{n+1} - 1$, dan pembilangnya kurang satu dari penyebut. Tebakan: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}-1}$.

Mencari teleskopik. Jika tebakan benar, maka $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1}$. Rekurensi memberi $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$, dan dekomposisi pecahan parsial $\frac{1}{a_n(a_n-1)} = \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_n}$ memberi persis identitas itu.

Solusi. Dari rekurensi, $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$, sehingga $\frac{1}{a_{n+1}-1} = \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_n}$, yaitu $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1}$. Semua $a_n \geq 2$ (induksi), jadi penyebutnya positif. Menjumlahkan dari 1 sampai n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1-1} - \frac{1}{a_{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}-1} < 1. \quad \blacksquare$$

Refleksi. Menghitung beberapa suku bukan pemborosan waktu: di sini pola pada jumlah parsial langsung menunjukkan bentuk teleskopik. Barisan ini, barisan Sylvester, juga menunjukkan bahwa $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \dots$, sebuah “pecahan Mesir” tak hingga yang suku-sukunya tumbuh sangat cepat.

4.7 Wawasan sejarah dan konteks

Leonardo dari Pisa (Fibonacci) memperkenalkan barisan kelinci dalam *Liber Abaci* (1202), meskipun barisan yang sama telah dikenal dalam prosodi India jauh sebelumnya. Rumus eksplisit yang kini disebut rumus Binet (1843) sudah diketahui Abraham de Moivre lebih dari seabad sebelumnya. Teori rekurensi linear kemudian menjadi bagian dari teori persamaan beda, analog diskret persamaan diferensial.

Soal barisan di IMO modern jarang meminta rumus eksplisit; lebih sering soalnya menanyakan perilaku jangka panjang, misalnya “akhirnya periodik”, “akhirnya konstan”, atau “selalu bulat”, yang memerlukan invarian dan penaksiran seperti di bab ini.

Inti Bab

Rekurensi linear diselesaikan dengan persamaan karakteristik; akar kembar menambah faktor n . Deret diselesaikan dengan mencari suku yang teleskopik. Iterasi fungsi Möbius sering periodik; cari periodenya dengan menghitung $f \circ f$.

Untuk barisan tak linear seperti $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, cari besaran yang tumbuh hampir konstan (di sini a_n^2), pakai batas kasar untuk mengendalikan suku sisa, lalu perketat. Teknik ini, bukan rumus, yang paling sering diperlukan di olimpiade.

Latihan

4.1 ★ Tentukan a_n jika $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, dan $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

4.2 ★ Buktikan $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

4.3 ★ Hitung $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

4.4 ★ Buktikan $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

4.5 ★★ Barisan $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$. Tentukan rumus a_n .

4.6 ★★ Barisan $x_0 = \frac{5}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Buktikan $x_n = 2^{2^n} + 2^{-2^n}$ dan tentukan $\lfloor x_n \rfloor$.

4.7 ★★ Buktikan $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

4.8 ★★★ Barisan $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$. Buktikan semua sukunya bilangan bulat.

Aljabar Simetris

Simetri adalah penghemat kerja. Ekspresi yang tidak berubah saat variabelnya ditukar dapat ditulis hanya dengan tiga besaran, $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, dan $r = abc$. Dengan cara ini, sebuah soal berderajat tinggi dalam tiga variabel sering menyusut menjadi soal sederhana dalam dua atau tiga parameter.

Bab ini juga mengumpulkan faktorisasi klasik yang muncul berulang kali di teori bilangan dan ketaksamaan, seperti $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ dan identitas Sophie Germain. Mengenali faktorisasi tersembunyi adalah keterampilan yang membedakan penyelesaian satu baris dari perhitungan satu halaman.

📍 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menyatakan ekspresi simetris dalam polinomial simetris elementer; (2) memakai identitas faktorisasi klasik; (3) memakai jumlah Newton untuk sistem persamaan; (4) memakai substitusi $s = x + y$, $p = xy$; (5) mengenali faktorisasi tersembunyi seperti identitas Sophie Germain.

5.1 Polinomial simetris elementer

📖 **DEFINISI 5.1** Untuk tiga variabel a, b, c didefinisikan $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, dan $r = abc$. Polinomial $f(a, b, c)$ disebut **simetris** jika nilainya tidak berubah oleh sembarang pertukaran variabel.

★ **TEOREMA 5.2** (Teorema dasar polinomial simetris) *Setiap polinomial simetris dalam a, b, c dapat ditulis secara tunggal sebagai polinomial dalam p, q, r . Hal yang sama berlaku untuk n variabel dengan n polinomial simetris elementer.*

Beberapa bentuk yang sering dipakai:

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q, \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr, \quad (a+b)(b+c)(c+a) = pq - r.$$

Bentuk terakhir diperoleh dari $a + b = p - c$ sehingga $(a+b)(b+c)(c+a) = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - p \cdot p^2 + qp - r$.

5.2 Identitas faktorisasi klasik

★ **TEOREMA 5.3** *Untuk semua bilangan a, b, c ,*

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \end{aligned}$$

Bukti. Dalam p, q, r , $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r$, sehingga ruas kiri sama dengan $p^3 - 3pq = p(p^2 - 3q)$, dan $p^2 - 3q = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$. $\square$

★ **AKIBAT 5.4** *Jika $a + b + c = 0$, maka $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Akibatnya $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$.*

✎ **CONTOH 5.1** Misalkan $a + b + c = 0$. Buktikan $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ca)$, lalu simpulkan $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Solusi. Dengan $p = 0$, setiap bilangan $x \in \{a, b, c\}$ memenuhi $x^3 = -qx + r$ (karena a, b, c akar $t^3 + qt - r$). Tulis $s_k = a^k + b^k + c^k$. Mengalikan dengan x^{k-3} dan menjumlahkan memberi $s_k = -q s_{k-2} + r s_{k-3}$. Dengan $s_0 = 3, s_1 = 0, s_2 = -2q$:

$$s_3 = -q s_1 + 3r = 3r, \quad s_4 = -q s_2 + r s_1 = 2q^2, \quad s_5 = -q s_3 + r s_2 = -3qr - 2qr = -5qr.$$

Jadi $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ca)$. Selanjutnya $\frac{s_3}{3} \cdot \frac{s_2}{2} = r \cdot (-q) = \frac{s_5}{5}$. $\blacksquare$

5.3 Jumlah Newton

★ **TEOREMA 5.5** (*Identitas Newton, tiga variabel*) Dengan $e_1 = p$, $e_2 = q$, $e_3 = r$ dan $s_k = a^k + b^k + c^k$, berlaku

$$\begin{aligned}s_1 &= e_1, & s_2 &= e_1 s_1 - 2e_2, & s_3 &= e_1 s_2 - e_2 s_1 + 3e_3, \\ s_k &= e_1 s_{k-1} - e_2 s_{k-2} + e_3 s_{k-3} \quad (k \geq 4).\end{aligned}$$

🔍 **CONTOH 5.2** Selesaikan sistem $x + y + z = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 + y^3 + z^3 = 36$.

Solusi. $e_1 = 6$ dan $14 = 36 - 2e_2$, jadi $e_2 = 11$. Lalu $36 = 6 \cdot 14 - 11 \cdot 6 + 3e_3 = 18 + 3e_3$, jadi $e_3 = 6$. Maka x, y, z adalah akar-akar

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t - 1)(t - 2)(t - 3),$$

sehingga $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$, dengan keenam urutannya. ■

5.4 Dua variabel: substitusi s dan p

Untuk dua variabel, tulis $s = x + y$ dan $p = xy$. Maka $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$, $x^3 + y^3 = s^3 - 3ps$, dan x, y adalah akar $t^2 - st + p = 0$, sehingga x, y real jika dan hanya jika $s^2 \geq 4p$.

🔍 **CONTOH 5.3** Selesaikan $x + y = 3$ dan $x^3 + y^3 = 9$.

Solusi. $27 - 9p = 9$, jadi $p = 2$, dan x, y adalah akar $t^2 - 3t + 2 = 0$. Solusinya $(1, 2)$ dan $(2, 1)$. ■

5.5 Faktorisasi tersembunyi

🔍 **CONTOH 5.4** Buktikan $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ selalu kuadrat sempurna.

Solusi. Pasangkan faktor luar dan dalam: $n(n+3) = n^2 + 3n$ dan $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$. Dengan $m = n^2 + 3n + 1$, hasil kalinya $(m-1)(m+1) = m^2 - 1$. Jadi ekspresinya $(n^2 + 3n + 1)^2$. ■

★ **TEOREMA 5.6** (*Identitas Sophie Germain*) $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$.

Bukti. $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$, lalu gunakan selisih dua kuadrat. □

🔍 **CONTOH 5.5** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n^4 + 4$ prima.

Solusi. Dengan $b = 1$: $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. Faktor kedua sama dengan $(n - 1)^2 + 1$, yang lebih dari 1 untuk $n \geq 2$; faktor pertama selalu lebih dari 1. Jadi untuk $n \geq 2$ bilangan itu komposit. Untuk $n = 1$, $n^4 + 4 = 5$ prima. Jawaban: $n = 1$. ■

💡 **STRATEGI** Jika ekspresi berbentuk $X^4 + 4Y^4$, $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$, atau hasil kali empat bilangan berurutan, curigai faktorisasi di atas. Dalam teori bilangan, faktorisasi mengubah pertanyaan tentang keprimaan menjadi pertanyaan tentang ukuran faktor.

5.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

🔍 **CONTOH 5.6** Bilangan a, b, c memenuhi $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, dan $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Hitung $a^4 + b^4 + c^4$.

Coretan pertama. Mencari a, b, c secara eksplisit berarti menyelesaikan persamaan kubik, dan akarnya ternyata tidak rapi. Peserta yang terlatih langsung menyadari bahwa soal ini tidak meminta a, b, c , melainkan sebuah besaran simetris. Maka tidak perlu mengetahui akarnya; cukup polinomial simetris elementernya.

Ide. Tiga jumlah pangkat pertama menentukan e_1, e_2, e_3 melalui identitas Newton, dan e_1, e_2, e_3 menentukan semua jumlah pangkat berikutnya.

Solusi. Dengan $s_k = a^k + b^k + c^k$: $e_1 = s_1 = 1$. Dari $s_2 = e_1 s_1 - 2e_2$: $2 = 1 - 2e_2$, $e_2 = -\frac{1}{2}$. Dari $s_3 = e_1 s_2 - e_2 s_1 + 3e_3$: $3 = 2 + \frac{1}{2} + 3e_3$, $e_3 = \frac{1}{6}$. Maka

$$s_4 = e_1 s_3 - e_2 s_2 + e_3 s_1 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}. \quad \blacksquare$$

Refleksi. Soal ini sering disalahpahami sebagai soal “tebak pola” (jawaban 4). Justru karena polanya menggoda, penting untuk menghitung dengan alat yang pasti. Identitas

Newton juga menunjukkan hal yang lebih dalam: untuk n variabel, n jumlah pangkat pertama menentukan semua jumlah pangkat lainnya.

5.7 Wawasan sejarah dan konteks

Isaac Newton mencatat identitas antara jumlah pangkat dan koefisien polinomial dalam *Arithmetica Universalis* (terbit 1707), meskipun Albert Girard sudah menemukan sebagian kasusnya pada 1629. Teorema dasar polinomial simetris dipakai secara sistematis oleh Lagrange dan Gauss, dan menjadi batu loncatan menuju teori Galois tentang kapan persamaan polinomial dapat diselesaikan dengan akar.

Sophie Germain (1776–1831) belajar matematika secara otodidak dan berkorespondensi dengan Gauss dengan nama samaran laki-laki. Identitas $a^4 + 4b^4$ yang menyandang namanya hanyalah bagian kecil dari karyanya; sumbangan utamanya adalah kemajuan penting pada Teorema Terakhir Fermat dan teori elastisitas.

Inti Bab

Setiap polinomial simetris adalah polinomial dalam p, q, r ; jumlah Newton memberi $a^k + b^k + c^k$ secara rekursif. Untuk dua variabel, cukup $s = x + y$ dan $p = xy$, dengan syarat keberadaan akar real $s^2 \geq 4p$.

Faktorisasi $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $a^4 + 4b^4$, dan “pasangkan faktor luar dengan faktor dalam” pada hasil kali bilangan berurutan adalah tiga pola yang harus langsung dikenali.

Latihan

5.1 ★ Jika $x + y = 5$ dan $xy = 3$, hitung $x^4 + y^4$.

5.2 ★ Jika $a + b + c = 0$ dan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, hitung $a^4 + b^4 + c^4$.

5.3 ★ Selesaikan sistem $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ di bilangan real.

5.4 ★★ Bilangan real tak nol a, b, c dengan $a + b + c \neq 0$ memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$. Buktikan dua di antaranya berjumlah nol.

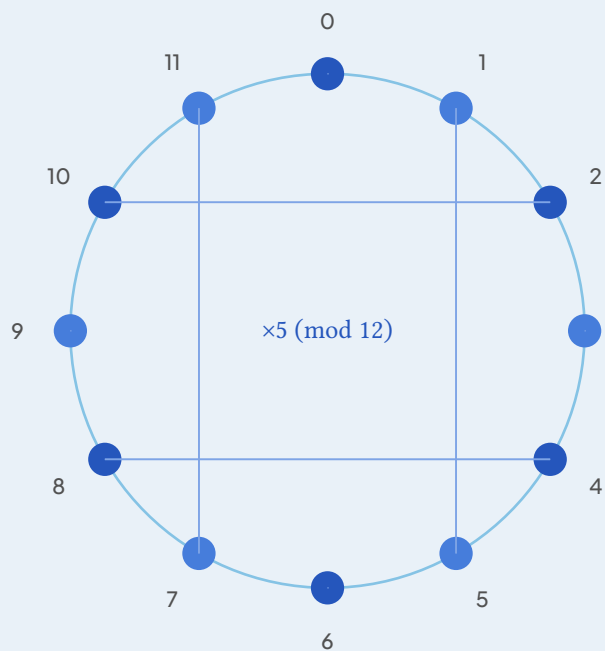
5.5 ★★ Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n^4 + 4^n$ prima.

- 5.6 ★★** Bilangan real a, b, c memenuhi $a + b + c = 6$ dan $ab + bc + ca = 9$. Buktikan $0 \leq a, b, c \leq 4$.
- 5.7 ★★** Buktikan bahwa jika $a + b + c = 0$ maka $2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$.
- 5.8 ★★★** Tentukan semua bilangan bulat x, y, z dengan $x + y + z = 3$ dan $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.



Teori Bilangan

Keterbagian, kongruensi, persamaan Diofantin, bilangan prima, serta kuadrat dan pangkat. Soal teori bilangan tampak sederhana dan sering menjadi nomor 1 atau 4; menguasainya berarti mengamankan tujuh poin pertama.



Keterbagian

Teori bilangan dimulai dari satu kata: membagi. Hampir semua soal teori bilangan olimpiade dapat dirumuskan ulang sebagai pertanyaan keterbagian: apakah a membagi b , berapa pangkat tertinggi p yang membagi n , apa faktor persekutuan terbesar dua ekspresi.

Soal-soal IMO terbaru menunjukkan pentingnya fondasi ini. IMO 2023 Soal 1 hanya memerlukan pembagi dan pasangan d dengan n/d ; IMO 2019 Soal 4 bermula dari menghitung pangkat 2; IMO 2026 Soal 1 adalah permainan FPB dan KPK yang diselesaikan dengan melihat eksponen prima. Bab ini menyiapkan semua alat tersebut.

PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai sifat dasar keterbagian dan algoritma pembagian; (2) menghitung FPB dengan algoritma Euclid dan memakai identitas Bézout; (3) memakai faktorisasi prima untuk menghitung banyak dan jumlah pembagi; (4) menghitung pangkat prima dalam faktorial dengan rumus Legendre; (5) memakai faktorisasi $a^n - b^n$.

6.1 Definisi dan sifat dasar

 **DEFINISI 6.1** Untuk bilangan bulat $a \neq 0$ dan b , kita tulis $a \mid b$ (a **membagi** b) jika ada bilangan bulat k dengan $b = ka$.

Sifat-sifat berikut langsung dari definisi: jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$; jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid bx + cy$ untuk semua bilangan bulat x, y ; jika $a \mid b$ dan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$.

★ **TEOREMA 6.2** (*Algoritma pembagian*) Untuk bilangan bulat a dan $b > 0$ ada tepat satu pasangan bilangan bulat q, r dengan $a = bq + r$ dan $0 \leq r < b$.

Bukti. Ambil r anggota terkecil himpunan tak negatif $\{a - bq : q \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (tak kosong). Jika $r \geq b$, maka $r - b$ anggota yang lebih kecil, kontradiksi. Ketunggalan: jika $bq + r = bq' + r'$, maka $b \mid r - r'$ dengan $|r - r'| < b$, jadi $r = r'$. □

6.2 FPB, algoritma Euclid, dan Bézout

★ **TEOREMA 6.3** (*Bézout*) Untuk bilangan bulat a, b yang tidak keduanya nol, ada bilangan bulat x, y dengan $ax + by = \text{FPB}(a, b)$. Lebih jauh, $\text{FPB}(a, b)$ adalah bilangan positif terkecil yang berbentuk $ax + by$.

Bukti. Misalkan d bilangan positif terkecil berbentuk $ax + by$. Bagi a oleh d : $a = dq + r$ dengan $0 \leq r < d$. Maka $r = a - q(ax + by)$ juga berbentuk kombinasi tersebut dan lebih kecil dari d , sehingga $r = 0$ dan $d \mid a$. Demikian pula $d \mid b$. Sebaliknya setiap pembagi persekutuan a dan b membagi $ax + by = d$. Jadi $d = \text{FPB}(a, b)$. □

★ **AKIBAT 6.4** (1) $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(a - kb, b)$ untuk setiap bilangan bulat k (dasar algoritma Euclid). (2) Jika $a \mid bc$ dan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka $a \mid c$ (lema Euclid).

Bukti. (1) Pembagi persekutuan kedua pasangan sama. (2) Dari $ax + by = 1$ diperoleh $c = acx + bcy$, dan a membagi kedua suku. □

🔍 **CONTOH 6.1** (*IMO 1959*) Buktikan pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan untuk setiap bilangan asli n .

Solusi. $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$. Maka setiap pembagi persekutuan pembilang dan penyebut membagi 1, sehingga $\text{FPB}(21n+4, 14n+3) = 1$. ■

 **CONTOH 6.2** Buktikan $\text{FPB}(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$ untuk setiap bilangan asli n .

Solusi. Misalkan d membagi keduanya. Karena $(n + 1)(n! + 1) - ((n + 1)! + 1) = n$, diperoleh $d \mid n$. Akibatnya $d \mid n!$, dan karena $d \mid n! + 1$, diperoleh $d \mid 1$. ■

6.3 Faktorisasi prima

★ **TEOREMA 6.5** (*Teorema dasar aritmetika*) Setiap bilangan asli $n > 1$ dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan prima, dan penulisan ini tunggal jika urutan faktor diabaikan.

Bukti. Eksistensi: induksi kuat; jika n tidak prima, $n = ab$ dengan $1 < a, b < n$. Ketunggalan: jika $p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_l$, lema Euclid memberi $p_1 \mid q_j$ untuk suatu j , sehingga $p_1 = q_j$; coret dan lanjutkan dengan induksi. □

Jika $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, setiap pembagi positif n berbentuk $p_1^{f_1} \cdots p_k^{f_k}$ dengan $0 \leq f_i \leq e_i$. Karena itu

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1), \quad \sigma(n) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

 **CONTOH 6.3** Buktikan: $\tau(n)$ ganjil jika dan hanya jika n kuadrat sempurna.

Solusi. $\tau(n) = \prod (e_i + 1)$ ganjil jika dan hanya jika semua e_i genap, yaitu n kuadrat. (Bukti lain: pasangan pembagi d dengan n/d ; yang tidak berpasangan hanyalah $d = \sqrt{n}$.) ■

 **CONTOH 6.4** Misalkan a, b bilangan asli dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$ dan $a \mid b^2$. Buktikan $a = 1$.

Solusi. Andaikan $a > 1$ dan ambil prima $p \mid a$. Maka $p \mid b^2 = b \cdot b$, sehingga $p \mid b$ (lema Euclid). Jadi p membagi a dan b , bertentangan dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$. ■

6.4 Rumus Legendre

★ **TEOREMA 6.6** (Legendre) Untuk bilangan prima p dan bilangan asli n ,

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

Bukti. $v_p(n!) = \sum_{m=1}^n v_p(m)$. Bilangan $m \leq n$ dengan $v_p(m) = j$ dihitung tepat j kali di ruas kanan: sekali di setiap suku $\lfloor n/p^i \rfloor$ dengan $i \leq j$, karena $\lfloor n/p^i \rfloor$ adalah banyak kelipatan p^i yang tidak melebihi n . □

🔪 **CONTOH 6.5** Berapa banyak angka nol di akhir 2026!?

Solusi. Banyak nol sama dengan $\min(v_2(2026!), v_5(2026!)) = v_5(2026!)$. Dengan Legendre: $\lfloor 2026/5 \rfloor + \lfloor 2026/25 \rfloor + \lfloor 2026/125 \rfloor + \lfloor 2026/625 \rfloor = 405 + 81 + 16 + 3 = 505$. ■

6.5 Faktorisasi $a^n - b^n$

Untuk setiap bilangan asli n ,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}),$$

dan untuk n ganjil $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$. Jadi $a - b \mid a^n - b^n$, dan $a + b \mid a^n + b^n$ bila n ganjil. Selain itu, jika $m \mid n$ maka $a^m - b^m \mid a^n - b^n$.

🔪 **CONTOH 6.6** Buktikan: jika $2^n - 1$ prima, maka n prima.

Solusi. Jika $n = ab$ dengan $1 < a, b < n$, maka $2^a - 1 \mid 2^n - 1$ dengan $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$, sehingga $2^n - 1$ komposit. ■

🔪 **CONTOH 6.7** Buktikan $\text{FPB}(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{\text{FPB}(m, n)} - 1$.

Solusi. Untuk $m > n$, $2^m - 1 = 2^{m-n}(2^n - 1) + (2^{m-n} - 1)$, sehingga $\text{FPB}(2^m - 1, 2^n - 1) = \text{FPB}(2^{m-n} - 1, 2^n - 1)$. Ini meniru algoritma Euclid pada eksponen, yang berakhir pada $\text{FPB}(m, n)$. ■

6.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 6.8** Buktikan $n^5 - 5n^3 + 4n$ habis dibagi 120 untuk setiap bilangan bulat n .

Coretan pertama. $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Kita bisa memeriksa sisa modulo 8, 3, dan 5 satu per satu: delapan kasus, tiga kasus, lima kasus. Itu berhasil, tetapi membosankan. Peserta yang baik bertanya dulu: *bisakah ekspresi ini difaktorkan?*

Pengamatan. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$. Setiap faktor kuadrat adalah selisih dua kuadrat, jadi ekspresinya adalah $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$: hasil kali lima bilangan bulat berurutan. Dan $120 = 5!$.

Solusi. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Hasil kali k bilangan bulat berurutan habis dibagi $k!$ (Soal 6.1), dan $5! = 120$. ■

Refleksi. Angka 120 dalam soal adalah petunjuk: $120 = 5!$ dan ekspresinya berderajat 5. Membaca “angka-angka ajaib” dalam soal seperti ini sering langsung mengarah ke struktur tersembunyi. Pelajaran umumnya: sebelum memecah kasus modulo, coba faktorkan.

6.7 Wawasan sejarah dan konteks

Algoritma pembagian dan algoritma untuk FPB terdapat dalam Buku VII *Elemen* karya Euklides (sekitar 300 SM), sehingga algoritma Euclid adalah salah satu algoritma tertua yang masih dipakai setiap hari, termasuk di dalam kriptografi modern. Identitas yang kini dinamai menurut Étienne Bézout (abad ke-18) sebenarnya sudah dipakai Claude Gaspard Bachet de Méziriac seabad sebelumnya. Adrien-Marie Legendre menerbitkan rumus pangkat prima dalam faktorial pada 1808.

Teorema dasar aritmetika, ketunggalan faktorisasi prima, tampak begitu jelas sehingga baru dirumuskan dan dibuktikan dengan cermat oleh Gauss pada 1801. Pentingnya ketunggalan itu baru benar-benar disadari ketika matematikawan abad ke-19 menemukan sistem bilangan (seperti $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$) di mana faktorisasi tidak tunggal.

Inti Bab

Algoritma Euclid dan identitas Bézout adalah jantung keterbagian: FPB adalah kombinasi linear terkecil, dan $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(a - kb, b)$. Dari sini lahir lema Euclid dan ketunggalan faktorisasi prima.

Setelah faktorisasi prima tersedia, banyak pertanyaan dapat dijawab *per prima*: τ , σ , FPB, KPK, dan $v_p(n!)$ melalui rumus Legendre. Faktorisasi $a^n - b^n$ menghubungkan eksponen dengan keterbagian dan menjadi jembatan menuju LTE di bab berikutnya.

Latihan

- 6.1 ★** Buktikan hasil kali tiga bilangan bulat berurutan habis dibagi 6, dan hasil kali k bilangan bulat berurutan habis dibagi $k!$.
- 6.2 ★** Tentukan $\text{FPB}(2026, 1013 \cdot 3 + 1)$ dengan algoritma Euclid, lalu nyatakan sebagai kombinasi linear keduanya.
- 6.3 ★** Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 pembagi positif.
- 6.4 ★★** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n + 1 \mid n^2 + 1$.
- 6.5 ★★** Buktikan $v_2((2n)!) - v_2(n!) = n$, lalu tunjukkan $\binom{2n}{n}$ genap untuk $n \geq 1$.
- 6.6 ★★** Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n , $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ bilangan bulat.
- 6.7 ★★★** Tentukan semua bilangan asli a, b sehingga $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ dan $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ keduanya bilangan bulat. (APMO 2002)



Kongruensi

Kongruensi adalah aritmetika yang lupa pada hal-hal yang tidak penting. Dengan bekerja modulo n , kita membuang informasi yang tidak relevan dan mempertahankan tepat apa yang dibutuhkan untuk pertanyaan keterbagian.

Tiga teorema di bab ini, Fermat, Euler, dan orde, menyelesaikan porsi besar soal teori bilangan IMO. IMO 2024 Soal 2 runtuh begitu kita memilih modulus $ab + 1$ dan eksponen $n \equiv -1 \pmod{\varphi(ab + 1)}$. IMO 2022 Soal 5 membutuhkan LTE. Soal-soal jenis “ n membagi $a^n - 1$ ” hampir selalu diselesaikan oleh faktor prima terkecil dan orde.

◎ PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) berhitung modulo n dengan lancar; (2) memakai teorema Fermat kecil, Euler, dan Wilson; (3) menyelesaikan sistem kongruensi dengan Teorema Sisa Cina; (4) memakai konsep orde; (5) memakai lema *lifting the exponent* (LTE).

7.1 Aritmetika modular

DEFINISI 7.1 Untuk bilangan asli n , kita tulis $a \equiv b \pmod{n}$ jika $n \mid a - b$.

Kongruensi modulo n adalah relasi ekuivalen yang menghormati penjumlahan dan perkalian: jika $a \equiv b$ dan $c \equiv d \pmod{n}$, maka $a + c \equiv b + d$ dan $ac \equiv bd \pmod{n}$, sehingga $a^k \equiv b^k \pmod{n}$. Pembagian hanya boleh dilakukan dengan bilangan yang relatif prima terhadap n : jika $\text{FPB}(c, n) = 1$, maka $ac \equiv bc \pmod{n}$ mengakibatkan $a \equiv b \pmod{n}$.

Bilangan c' dengan $cc' \equiv 1 \pmod{n}$ disebut **invers** c modulo n ; menurut Bézout, invers ada jika dan hanya jika $\text{FPB}(c, n) = 1$.

7.2 Fermat, Euler, dan Wilson

DEFINISI 7.2 Fungsi Euler $\varphi(n)$ adalah banyak bilangan di $\{1, 2, \dots, n\}$ yang relatif prima dengan n . Untuk $n = \prod p_i^{e_i}$, $\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

★ TEOREMA 7.3 (Euler) Jika $\text{FPB}(a, n) = 1$, maka $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Khususnya, untuk prima $p \nmid a$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (Fermat kecil), dan $a^p \equiv a \pmod{p}$ untuk semua a .

Bukti. Misalkan $r_1, \dots, r_{\varphi(n)}$ adalah bilangan di $\{1, \dots, n\}$ yang relatif prima dengan n . Bilangan $ar_1, \dots, ar_{\varphi(n)}$ juga relatif prima dengan n dan saling tidak kongruen modulo n (karena a dapat dibagi). Jadi keduanya adalah sistem sisa yang sama, dan hasil kalinya kongruen: $a^{\varphi(n)} \prod r_i \equiv \prod r_i$. Bagi dengan $\prod r_i$, yang relatif prima dengan n . $\square$

★ TEOREMA 7.4 (Wilson) Untuk bilangan prima p , $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Bukti. Untuk $p = 2$ jelas. Untuk p ganjil, setiap $a \in \{1, \dots, p-1\}$ memiliki invers tunggal di himpunan itu. Invers sama dengan dirinya sendiri hanya bila $a^2 \equiv 1$, yaitu $p \mid (a-1)(a+1)$, sehingga $a = 1$ atau $a = p-1$. Bilangan-bilangan lain dapat dipasangkan dengan inversnya dan hasil kali setiap pasangan $\equiv 1$. Jadi $(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1$. $\square$

CONTOH 7.1 Tentukan sisa pembagian 2^{2026} oleh 7, dan dua digit terakhir 7^{2026} .

Solusi. $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ dan $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, sehingga $2^{2026} \equiv 2 \pmod{7}$. Untuk bagian kedua, $7^2 = 49$ dan $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Karena $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, diperoleh $7^{2026} \equiv 49 \pmod{100}$. Dua digit terakhirnya 49. $\blacksquare$

7.3 Teorema Sisa Cina

★ **TEOREMA 7.5** (Teorema Sisa Cina) Jika $n_1, \dots, n_k$ relatif prima sepasang-sepasang, sistem $x \equiv a_i \pmod{n_i}$ ($i = 1, \dots, k$) memiliki solusi, dan solusinya tunggal modulo $N = n_1 n_2 \cdots n_k$.

Bukti. Untuk setiap i , $N_i = N/n_i$ relatif prima dengan n_i , jadi ada M_i dengan $N_i M_i \equiv 1 \pmod{n_i}$. Maka $x = \sum a_i N_i M_i$ memenuhi semua kongruensi, karena $N_j \equiv 0 \pmod{n_i}$ untuk $j \neq i$. Jika x, x' keduanya solusi, setiap n_i membagi $x - x'$, sehingga $N \mid x - x'$. □

🔍 **CONTOH 7.2** Tentukan bilangan asli terkecil yang bersisa 2 bila dibagi 3, bersisa 3 bila dibagi 5, dan bersisa 2 bila dibagi 7.

Solusi. Dari $x \equiv 2 \pmod{3}$ dan $x \equiv 2 \pmod{7}$ diperoleh $x \equiv 2 \pmod{21}$, yaitu $x \in \{2, 23, 44, 65, 86, \dots\}$. Yang pertama bersisa 3 modulo 5 adalah 23. Jadi $x \equiv 23 \pmod{105}$, dan jawabannya 23. ■

7.4 Orde

📖 **DEFINISI 7.6** Untuk $\text{FPB}(a, n) = 1$, **orde** a modulo n , ditulis $\text{ord}_n(a)$, adalah bilangan asli terkecil d dengan $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

★ **LEMA 7.7** (Lema orde) $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ jika dan hanya jika $\text{ord}_n(a) \mid m$. Khususnya $\text{ord}_n(a) \mid \varphi(n)$, dan $\text{ord}_p(a) \mid p - 1$ untuk prima p .

Bukti. Tulis $m = qd + r$ dengan $d = \text{ord}_n(a)$ dan $0 \leq r < d$. Maka $a^m = (a^d)^q a^r \equiv a^r$. Jadi $a^m \equiv 1$ jika dan hanya jika $a^r \equiv 1$, dan karena $r < d$ minimal, ini terjadi jika dan hanya jika $r = 0$. □

🔍 **CONTOH 7.3** Tentukan semua bilangan asli n dengan $n \mid 2^n - 1$.

Solusi. Jelas $n = 1$ memenuhi. Andaikan $n > 1$ dan misalkan p faktor prima terkecil n . Karena $2^n - 1$ ganjil, p ganjil. Dari $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ dan Fermat $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, lema orde memberi $\text{ord}_p(2) \mid \text{FPB}(n, p - 1)$. Semua faktor prima $p - 1$ lebih kecil dari p ,

sedangkan semua faktor prima n minimal p ; jadi $\text{FPB}(n, p-1) = 1$. Maka $\text{ord}_p(2) = 1$, yaitu $p \mid 2-1$, mustahil. Jawaban: $n = 1$. ■

💡 STRATEGI Dalam soal berbentuk $n \mid a^n \pm 1$, hampir selalu ambil *faktor prima terkecil* dari n , lalu gabungkan informasi orde dengan Fermat. Faktor prima terkecil membuat $\text{FPB}(n, p-1)$ mudah dikendalikan.

7.5 Lema lifting the exponent

★ TEOREMA 7.8 (LTE) Misalkan p prima ganjil, a, b bilangan bulat dengan $p \mid a-b$ dan $p \nmid ab$. Maka untuk setiap bilangan asli n ,

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$

Untuk $p = 2$: jika a, b ganjil dan n genap, $v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(a + b) + v_2(n) - 1$.

Sketsa bukti. Cukup dua kasus. (i) $p \nmid n$: $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + \dots + b^{n-1} \equiv na^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$.
(ii) $n = p$: tulis $a = b + kp$ dan jabarkan setiap suku; diperoleh $\frac{a^p - b^p}{a - b} \equiv pb^{p-1} \pmod{p^2}$, sehingga pangkat p -nya tepat 1. Kasus umum mengikuti dengan menulis $n = p^k m$ dan menerapkan (ii) berulang kali, lalu (i). □

🔗 CONTOH 7.4 Buktikan $v_2(3^{2^k} - 1) = k + 2$ untuk $k \geq 1$.

Solusi. Dengan LTE untuk $p = 2, a = 3, b = 1, n = 2^k$: $v_2(3^{2^k} - 1) = v_2(2) + v_2(2) + k - 1 = 1 + 2 + k - 1 = k + 2$. ■

⚠️ AWAS LTE untuk p ganjil memerlukan $p \mid a - b$. Untuk $a^n + b^n$ dengan n ganjil, gunakan $b \mapsto -b$: $v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n)$ bila $p \mid a + b$ dan $p \nmid ab$.

7.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

CONTOH 7.5 Tentukan digit terakhir 7^{7^7} .

Coretan pertama. $7^7 = 823\,543$, jadi bilangan yang ditanyakan memiliki ratusan ribu digit; menghitungnya langsung mustahil. Digit terakhir adalah sisa modulo 10, jadi yang kita perlukan hanya perilaku $7^k \bmod 10$.

Pengamatan. $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$: digit terakhirnya 7, 9, 3, 1, lalu berulang. Jadi $\text{ord}_{10}(7) = 4$, dan cukup mengetahui $7^7 \bmod 4$. Di sini ada jebakan: bukan $7 \bmod 4$, melainkan eksponen 7^7 yang harus direduksi modulo 4.

Solusi. $7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}$, jadi $7^k \pmod{10}$ hanya bergantung pada $k \bmod 4$. Karena $7 \equiv -1 \pmod{4}$, $7^7 \equiv (-1)^7 \equiv 3 \pmod{4}$. Maka $7^{7^7} \equiv 7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10}$. Digit terakhirnya 3. ■

Refleksi. Menara pangkat diselesaikan dari atas: eksponen direduksi modulo orde (atau modulo φ), eksponen dari eksponen direduksi modulo orde berikutnya, dan seterusnya. Kesalahan paling umum adalah mereduksi eksponen modulo 10 padahal seharusnya modulo 4.

7.7 Wawasan sejarah dan konteks

Pierre de Fermat menyatakan teorema kecilnya dalam sebuah surat pada 1640, tanpa bukti; Leonhard Euler menerbitkan bukti pertama pada 1736 dan kemudian memperumumnya dengan fungsi φ . Teorema Wilson diumumkan Edward Waring pada 1770 atas nama muridnya John Wilson, dan dibuktikan Lagrange pada 1771. Teorema Sisa Cina berasal dari *Sunzi Suanjing*, teks Tiongkok kuno (sekitar abad ke-3 sampai ke-5), dengan soal terkenal tentang bilangan yang bersisa 2, 3, 2 bila dibagi 3, 5, 7: jawabannya 23, persis seperti contoh di bab ini.

Notasi kongruensi $a \equiv b \pmod{n}$ diperkenalkan Gauss dalam *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), buku yang mendirikan teori bilangan modern. Dua abad kemudian, aritmetika modular menjadi fondasi kriptografi kunci publik seperti RSA, yang keamanannya bergantung pada teorema Euler.

Inti Bab

Fermat dan Euler memberi periode pangkat; *orde* memberi periode yang paling tepat, dan lema orde ($a^m \equiv 1 \iff \text{ord}_n(a) \mid m$) adalah alat terkuat bab ini.

Teorema Sisa Cina memungkinkan kita bekerja modulo setiap faktor prima secara terpisah lalu menggabungkan hasilnya. LTE menghitung pangkat prima dalam $a^n - b^n$ dengan satu rumus. Wilson jarang diperlukan, tetapi ketika diperlukan, tidak ada penggantinya.

Latihan

- 7.1 ★** Tentukan dua digit terakhir 3^{2026} .
- 7.2 ★** Buktikan $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.
- 7.3 ★** Selesaikan $7x \equiv 3 \pmod{11}$.
- 7.4 ★★** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $3 \mid n \cdot 2^n + 1$.
- 7.5 ★★** Buktikan bahwa untuk prima p , $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.
- 7.6 ★★** Buktikan bahwa setiap faktor prima p dari $2^{2^n} + 1$ memenuhi $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.
- 7.7 ★★** Tentukan $v_3(10^{81} - 1)$.
- 7.8 ★★★** Tentukan semua pasangan bilangan prima (p, q) sehingga $pq \mid 2^p + 2^q$.

Persamaan Diofantin

Persamaan Diofantin adalah persamaan yang hanya menerima bilangan bulat. Batasan ini membuatnya lebih sulit sekaligus lebih indah: persamaan sederhana seperti $x^2 + y^2 = 3z^2$ ternyata tidak memiliki solusi tak nol, dan buktinya adalah contoh terbaik dari *infinite descent*.

Di IMO, persamaan Diofantin muncul hampir setiap tahun, sering sebagai soal nomor 1, 2, 4, atau 5: $a^p = b! + p$ (2022), $k!$ sebagai hasil kali (2019), dan $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ (2006). Bab ini mengajarkan urutan serangan standar: faktorisasi, modulo, penaksiran ukuran, lalu teknik khusus seperti *Vieta jumping*.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menyelesaikan persamaan linear dalam bilangan bulat; (2) memfaktorkan persamaan (termasuk trik faktorisasi Simon); (3) memakai modulo untuk membuktikan ketiadaan solusi; (4) mengenali persamaan Pell; (5) memakai *Vieta jumping* dan *infinite descent*.

8.1 Persamaan linear

★ **TEOREMA 8.1** Persamaan $ax + by = c$ (dengan a, b tidak keduanya nol) memiliki solusi bulat jika dan hanya jika $d = \text{FPB}(a, b)$ membagi c . Jika (x_0, y_0) sebuah solusi, semua solusinya adalah $x = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ dengan $t \in \mathbb{Z}$.

Bukti. Syarat perlu jelas; syarat cukup mengikuti dari Bézout. Jika (x, y) solusi lain, maka $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. Bagi dengan d ; karena $\text{FPB}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, diperoleh $\frac{b}{d} \mid x - x_0$. $\square$

 **CONTOH 8.1** Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) dengan $7x + 11y = 100$.

Solusi. Satu solusi adalah $(8, 4)$, karena $56 + 44 = 100$. Semua solusi bulat: $x = 8 + 11t$, $y = 4 - 7t$. Syarat $x > 0$ memberi $t \geq 0$, dan $y > 0$ memberi $t \leq 0$. Jadi hanya $(8, 4)$. ■

8.2 Faktorisasi

 **STRATEGI** Pindahkan semua suku ke satu ruas dan usahakan bentuk (faktor)(faktor) = konstanta. Untuk $xy + ax + by = c$, tambahkan ab ke kedua ruas: $(x + b)(y + a) = c + ab$ (trik faktorisasi Simon). Untuk kuadrat, lengkapi kuadrat lalu gunakan selisih dua kuadrat.

 **CONTOH 8.2** Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) dengan $xy = 2x + 3y$.

Solusi. $xy - 2x - 3y + 6 = 6$, yaitu $(x - 3)(y - 2) = 6$. Jika kedua faktor negatif, maka $x - 3 \geq -2$ dan $y - 2 \geq -1$, sehingga hasil kalinya paling banyak 2; jadi kedua faktor positif. Pasangan $(x - 3, y - 2) \in \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$ memberi $(x, y) = (4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)$. ■

 **CONTOH 8.3** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n^2 + 19n + 48$ kuadrat sempurna.

Solusi. Misalkan $n^2 + 19n + 48 = m^2$ dengan $m \geq 0$. Kalikan 4 dan lengkapi kuadrat: $(2n + 19)^2 - 169 = (2m)^2$, sehingga

$$(2n + 19 - 2m)(2n + 19 + 2m) = 169 = 13^2.$$

Kedua faktor positif (faktor kedua positif), faktor kedua lebih besar atau sama, dan jumlahnya $4n + 38 > 38$. Pilihan $13 \cdot 13$ memberi jumlah 26, terlalu kecil; jadi faktornya 1 dan 169, sehingga $4n + 38 = 170$, $n = 33$, dan $m = 42$. Memang $33^2 + 19 \cdot 33 + 48 = 1764 = 42^2$. ■

8.3 Modulo sebagai penyaring

Tabel sisa kuadrat: kuadrat modulo 3 adalah 0, 1; modulo 4 adalah 0, 1; modulo 8 adalah 0, 1, 4; modulo 5 adalah 0, 1, 4. Pangkat tiga modulo 9 adalah 0, 1, 8; modulo 7 adalah 0, 1, 6.

 **CONTOH 8.4** Buktikan $x^2 - 3y^2 = 2$ tidak memiliki solusi bulat.

Solusi. Modulo 3: $x^2 \equiv 2$, padahal kuadrat modulo 3 hanya 0 atau 1. ■

 **CONTOH 8.5** Buktikan $x^3 + y^3 + z^3 = 2029$ tidak memiliki solusi bulat.

Solusi. Pangkat tiga modulo 9 hanya bersisa 0, 1, atau $8 \equiv -1$. Jumlah tiga bilangan dari $\{0, 1, -1\}$ terletak di antara -3 dan 3 , sehingga modulo 9 tidak pernah bersisa 4 atau 5. Padahal $2029 = 9 \cdot 225 + 4 \equiv 4 \pmod{9}$. ■

 **AWAS** Modulo hanya dapat membuktikan *ketiadaan* solusi. Jika semua sisa tercapai, pilihlah modulus lain, atau beralih ke faktorisasi atau penaksiran ukuran.

8.4 Persamaan Pell

★ **TEOREMA 8.2** Jika d bilangan asli yang bukan kuadrat, persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ memiliki tak hingga banyak solusi bilangan asli. Jika (x_1, y_1) solusi dengan x_1 terkecil, semua solusi diberikan oleh $x_k + y_k\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^k$.

Kita buktikan bagian yang paling sering dipakai: jika (x, y) dan (u, v) solusi, maka $(xu + dyv, xv + yu)$ juga solusi, karena $(x^2 - dy^2)(u^2 - dv^2) = (xu + dyv)^2 - d(xv + yu)^2$.

 **CONTOH 8.6** Tentukan tiga solusi bilangan asli terkecil dari $x^2 - 2y^2 = 1$.

Solusi. Solusi fundamentalnya $(3, 2)$. Dari $(3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$ dan $(3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2}$ diperoleh $(3, 2)$, $(17, 12)$, $(99, 70)$. Pemeriksaan: $289 - 288 = 1$ dan $9801 - 9800 = 1$. ■

8.5 Vieta jumping

 **CONTOH 8.7** (IMO 1988) Bilangan asli a, b memenuhi $ab + 1 \mid a^2 + b^2$. Buktikan $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ kuadrat sempurna.

Solusi. Misalkan $k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ bukan kuadrat sempurna. Di antara semua pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b) dengan $a^2 + b^2 = k(ab + 1)$, pilih pasangan dengan $a \geq b$ dan $a + b$ minimum. Jika $b = 0$, maka $k = a^2$ kuadrat; jadi $b \geq 1$.

Pandang a sebagai akar persamaan kuadrat $x^2 - kb x + (b^2 - k) = 0$. Akar lainnya, menurut Vieta, adalah

$$a' = kb - a = \frac{b^2 - k}{a},$$

yang merupakan bilangan bulat (dari bentuk pertama). Pasangan (a', b) juga memenuhi $a'^2 + b^2 = k(a'b + 1)$.

- ▶ Jika $a' < 0$, maka $a'b + 1 \leq 0$, sehingga $k(a'b + 1) \leq 0 < a'^2 + b^2$, kontradiksi.
- ▶ Jika $a' = 0$, maka $b^2 = k$, kontradiksi.
- ▶ Jadi $a' > 0$, dan $a' = \frac{b^2 - k}{a} < \frac{b^2}{a} \leq a$. Pasangan (b, a') (diurutkan) memiliki jumlah $a' + b < a + b$, bertentangan dengan minimalitas.

Maka k haruslah kuadrat sempurna. ■

 **STRATEGI** Ciri *Vieta jumping*: persamaan kuadrat simetris dalam dua variabel dengan parameter k . Anggap salah satu variabel sebagai akar, “lompat” ke akar lain dengan rumus Vieta, dan tunjukkan pasangan baru lebih kecil tetapi tetap sah.

8.6 Infinite descent

 **CONTOH 8.8** Buktikan $x^2 + y^2 = 3z^2$ hanya memiliki solusi bulat $(0, 0, 0)$.

Solusi. Misalkan ada solusi tak nol; pilih yang $|x| + |y| + |z|$ minimum. Modulo 3, $x^2 + y^2 \equiv 0$ hanya mungkin bila $x \equiv y \equiv 0$ (sebab kuadrat bersisa 0 atau 1). Tulis $x = 3x'$, $y = 3y'$: $9(x'^2 + y'^2) = 3z^2$, sehingga $3 \mid z^2$ dan $3 \mid z$. Maka $(x', y', z/3)$ solusi tak nol yang lebih kecil, kontradiksi. ■

 **CONTOH 8.9** Buktikan $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$ hanya memiliki solusi bulat $(0, 0, 0)$.

Solusi. Dari persamaan, x genap; tulis $x = 2x_1$: $4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 0$. Maka y genap; tulis $y = 2y_1$: $2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 = 0$. Maka z genap; tulis $z = 2z_1$: $x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 = 0$. Jadi $(x/2, y/2, z/2)$ juga solusi. Jika ada solusi tak nol, proses ini menghasilkan bilangan bulat tak nol yang habis dibagi 2^m untuk semua m , mustahil. ■

8.7 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 8.10** Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) dengan $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Coretan pertama: coba nilai. $y = 1$: $16 = 4^2$. Solusi $(4, 1)$! $y = 2$: 21 ; $y = 3$: 28 ; $y = 4$: 37 ; $y = 5$: 48 . Tidak ada lagi sampai sini. Tampaknya solusinya jarang, tetapi mencoba nilai tidak pernah membuktikan bahwa daftar sudah lengkap.

Pengamatan struktur. Ruas kanan hampir kuadrat: $y^2 + 2y + 13 = (y + 1)^2 + 12$. Jadi $x^2 - (y + 1)^2 = 12$, selisih dua kuadrat yang tetap. Selisih dua kuadrat membesar ketika bilangannya membesar, sehingga solusinya pasti sedikit.

Solusi. Persamaan setara dengan $(x - y - 1)(x + y + 1) = 12$. Faktor kedua positif, jadi faktor pertama juga positif, dan faktor kedua lebih besar. Kedua faktor berjumlah $2x$, jadi berparitas sama; pasangan faktor 12 dengan paritas sama dan faktor pertama lebih kecil hanya $(2, 6)$. Maka $x - y - 1 = 2$ dan $x + y + 1 = 6$, sehingga $x = 4$, $y = 1$. Pemeriksaan: $16 = 1 + 2 + 13$. ■

Refleksi. Langkah melengkapkan kuadrat mengubah persamaan kuadrat dua variabel menjadi selisih kuadrat. Paritas adalah penyaring yang murah: dari empat pasangan faktor 12, hanya satu yang lolos. Latihan: ulangi untuk $x^2 = y^2 + 2y + c$ dengan berbagai c , dan amati bahwa $c - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ tidak pernah memberi solusi.

8.8 Wawasan sejarah dan konteks

Diofantus dari Aleksandria (sekitar abad ke-3) menulis *Arithmetica*, kumpulan soal persamaan dengan penyelesaian rasional. Pada salinan buku inilah Pierre de Fermat menulis catatan pinggir terkenal tentang $x^n + y^n = z^n$, yang baru dibuktikan Andrew

Wiles pada 1994–1995. Fermat juga mengembangkan metode *infinite descent* secara sistematis.

Persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ dipelajari secara mendalam oleh matematikawan India: Brahmagupta (abad ke-7) menemukan cara menggabungkan solusi, dan Bhaskara II (abad ke-12) memberi metode *chakravala* untuk menemukannya. Nama “persamaan Pell” berasal dari kekeliruan atribusi Euler; John Pell hampir tidak berperan. Pada 1900 David Hilbert bertanya apakah ada algoritma umum untuk semua persamaan Diofantin; pada 1970 Yuri Matiyasevich, melanjutkan karya Davis, Putnam, dan Robinson, membuktikan bahwa algoritma seperti itu tidak ada.

Inti Bab

Urutan serangan: (1) coba faktorkan, termasuk dengan melengkapi kuadrat atau trik Simon; (2) coba modulo kecil untuk menyaring kemungkinan atau membuktikan ketiadaan; (3) jepit ukuran variabel; (4) jika persamaan kuadrat simetris dengan parameter, coba *Vieta jumping*; (5) jika setiap solusi menghasilkan solusi yang lebih kecil, gunakan *descent*.

Ingat batas modulo: ia hanya membuktikan ketiadaan, tidak pernah keberadaan.

Latihan

- 8.1 ★** Tunjukkan $12x + 21y = 100$ tidak memiliki solusi bulat.
- 8.2 ★** Tentukan banyak pasangan bilangan asli (x, y) dengan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$.
- 8.3 ★** Buktikan $x^2 - y^2 = 2026$ tidak memiliki solusi bulat.
- 8.4 ★★** Tentukan semua bilangan asli x, y dengan $3^x = 2^y + 1$.
- 8.5 ★★** Tentukan tiga bilangan asli n terkecil sehingga $1 + 2 + \dots + n$ kuadrat sempurna.
- 8.6 ★★** Buktikan $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ hanya memiliki solusi bulat $(0, 0, 0)$.
- 8.7 ★★★** Bilangan asli a, b memenuhi $ab - 1 \mid a^2 + b^2$. Buktikan $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5$.



Bilangan Prima

Bilangan prima adalah atom bilangan asli. Setiap soal yang melibatkan prima menanyakan salah satu dari dua hal: bagaimana prima tersebar (ada berapa, di mana, dalam bentuk apa), atau bagaimana sebuah prima berinteraksi dengan ekspresi tertentu (kapan p membagi $a^2 + 1$, kapan $2^n - 1$ prima).

Bab ini memadukan bukti klasik Euklides dengan fakta modular yang praktis, seperti setiap prima di atas 3 berbentuk $6k \pm 1$ dan $24 \mid p^2 - 1$. Fakta-fakta kecil ini adalah langkah pertama yang paling sering dipakai di soal-soal seperti IMO 2022 Soal 3 dan Soal 5.

◎ PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) membuktikan ketakhinggaan berbagai keluarga bilangan prima; (2) memakai sisa bilangan prima modulo bilangan kecil; (3) mencirikan prima yang membagi $a^2 + 1$; (4) memanfaatkan bentuk khusus $2^n \pm 1$; (5) memakai sifat-sifat distribusi prima pada soal konstruksi.

9.1 Tak hingga banyaknya bilangan prima

★ **TEOREMA 9.1** (*Euklides*) *Ada tak hingga banyak bilangan prima.*

Bukti. Andaikan $p_1, \dots, p_k$ semua bilangan prima. Bilangan $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1 > 1$ memiliki faktor prima p . Faktor itu tidak sama dengan p_i mana pun, karena p_i membagi $N - 1$ dan jika juga membagi N maka membagi 1. □

★ **TEOREMA 9.2** *Ada tak hingga banyak bilangan prima berbentuk $4k + 3$.*

Bukti. Andaikan hanya $q_1, \dots, q_m$. Pandang $N = 4q_1q_2 \cdots q_m - 1 \equiv 3 \pmod{4}$. Karena N ganjil, semua faktor primanya ganjil. Jika semua berbentuk $4k + 1$, hasil kalinya $\equiv 1 \pmod{4}$; jadi ada faktor prima $q \equiv 3 \pmod{4}$. Tetapi tidak ada q_i yang membagi N (sebab $q_i \mid N + 1$). Kontradiksi. $\square$

9.2 Prima modulo bilangan kecil

Setiap prima $p > 3$ berbentuk $6k \pm 1$, sebab $6k$, $6k \pm 2$, dan $6k + 3$ habis dibagi 2 atau 3.

🔍 **CONTOH 9.1** Buktikan $24 \mid p^2 - 1$ untuk setiap prima $p \geq 5$.

Solusi. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Keduanya genap dan berurutan genap, sehingga salah satunya habis dibagi 4: hasil kalinya habis dibagi 8. Di antara $p - 1$, p , $p + 1$ ada kelipatan 3, dan itu bukan p . Karena $\text{FPB}(8, 3) = 1$, diperoleh $24 \mid p^2 - 1$. ■

🔍 **CONTOH 9.2** Tentukan semua bilangan prima p sehingga $p^2 + 2$ juga prima.

Solusi. Jika $p \neq 3$, maka $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, sehingga $3 \mid p^2 + 2$ dan $p^2 + 2 > 3$ bukan prima. Untuk $p = 3$, $p^2 + 2 = 11$ prima. Jawaban: $p = 3$. ■

9.3 Prima yang membagi $a^2 + 1$

★ **TEOREMA 9.3** *Jika p prima ganjil dan $p \mid a^2 + 1$, maka $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Bukti. $p \nmid a$ dan $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Menurut Fermat, $1 \equiv a^{p-1} = (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Karena $p > 2$, $(-1)^{(p-1)/2} = 1$, jadi $\frac{p-1}{2}$ genap. $\square$

★ **AKIBAT 9.4** *Ada tak hingga banyak prima berbentuk $4k + 1$.*

Bukti. Untuk setiap n , bilangan $(n!)^2 + 1$ ganjil dan setiap faktor primanya $\equiv 1 \pmod{4}$ serta lebih besar dari n (bilangan $\leq n$ membagi $n!$). $\square$

CATATAN Kebalikannya juga benar: untuk prima $p \equiv 1 \pmod{4}$, bilangan $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ memenuhi $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Ini mengikuti dari Wilson, karena $(p-1)! = \prod_{k=1}^{(p-1)/2} k(p-k) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} a^2$.

9.4 Bentuk $2^n \pm 1$

★ TEOREMA 9.5 (1) Jika $2^n - 1$ prima, maka n prima. (2) Jika $2^n + 1$ prima dengan $n \geq 1$, maka n pangkat dari 2.

Bukti. (1) Sudah dibuktikan di Bab 6. (2) Jika n memiliki faktor ganjil $m > 1$, tulis $n = mk$. Maka $2^k + 1 \mid (2^k)^m + 1 = 2^n + 1$ dengan $1 < 2^k + 1 < 2^n + 1$. $\square$

9.5 Distribusi bilangan prima

CONTOH 9.3 Buktikan ada 2026 bilangan asli berurutan yang semuanya komposit.

Solusi. Bilangan $2027! + 2, 2027! + 3, \dots, 2027! + 2027$ berurutan, dan $2027! + k$ habis dibagi k serta lebih besar dari k untuk $2 \leq k \leq 2027$. $\blacksquare$

★ TEOREMA 9.6 (Postulat Bertrand, tanpa bukti) Untuk setiap $n \geq 1$ ada bilangan prima p dengan $n < p \leq 2n$.

CONTOH 9.4 Buktikan untuk $n \geq 2$, bilangan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ bukan bilangan bulat.

Solusi. Misalkan 2^k pangkat 2 terbesar yang tidak melebihi n ($k \geq 1$). Kalikan jumlah dengan $L = \text{KPK}(1, \dots, n)$, dengan $v_2(L) = k$. Suku $\frac{L}{2^k}$ ganjil, sedangkan untuk setiap $m \neq 2^k$ di $\{1, \dots, n\}$ berlaku $v_2(m) < k$ (karena kelipatan 2^k berikutnya adalah $2^{k+1} > n$), sehingga $\frac{L}{m}$ genap. Maka $L \cdot \sum \frac{1}{m}$ ganjil. Jika jumlahnya bulat, $L \cdot \sum \frac{1}{m}$ akan genap (sebab L genap). Kontradiksi. $\blacksquare$

9.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 9.5** Tentukan semua bilangan prima p sehingga $2p + 1$ dan $4p + 1$ juga prima.

Coretan pertama. $p = 2$: 5 dan 9; gagal. $p = 3$: 7 dan 13; berhasil. $p = 5$: 11 dan 21; gagal. $p = 7$: 15; gagal. $p = 11$: 23 dan 45; gagal. Kegagalannya selalu karena kelipatan 3: 9, 21, 15, 45. Pola ini menunjukkan modulus yang tepat.

Ide. Periksa modulo 3. Untuk $p \neq 3$, $p \equiv 1$ atau $2 \pmod{3}$.

Solusi. Jika $p \equiv 1 \pmod{3}$, maka $2p + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ dan $2p + 1 > 3$, jadi bukan prima. Jika $p \equiv 2 \pmod{3}$, maka $4p + 1 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{3}$ dan $4p + 1 > 3$, jadi bukan prima. Maka $p = 3$, dan 7, 13 memang prima. Jawaban: $p = 3$. ■

Refleksi. Mencoba beberapa nilai bukan hanya untuk menemukan jawaban, tetapi juga untuk menemukan *alasan kegagalan*. Di sini kegagalan yang berulang karena faktor 3 adalah petunjuk modulus. Untuk tiga ekspresi linear p , $2p + 1$, $4p + 1$ yang koefisiennya mencakup semua sisa modulo 3, satu di antaranya pasti habis dibagi 3.

9.7 Wawasan sejarah dan konteks

Bukti Euklides tentang ketakhinggaan bilangan prima (Elemen, Buku IX) adalah salah satu bukti tertua yang masih diajarkan tanpa perubahan. Peter Gustav Lejeune Dirichlet membuktikan pada 1837 bahwa setiap barisan aritmetika $a, a + d, a + 2d, \dots$ dengan $\text{FPB}(a, d) = 1$ memuat tak hingga banyak prima; buktinya memakai analisis, jauh di luar argumen elementer bab ini untuk $4k + 3$ dan $4k + 1$. Joseph Bertrand menduga postulatnya pada 1845 dan Pafnuty Chebyshev membuktikannya pada 1852; Paul Erdős kemudian memberi bukti elementer yang terkenal saat berusia 19 tahun.

Banyak pertanyaan sederhana tentang prima masih terbuka: apakah ada tak hingga banyak prima kembar $p, p + 2$? Apakah setiap bilangan genap lebih dari 2 adalah jumlah dua prima (dugaan Goldbach)? Pada 2013 Yitang Zhang membuktikan bahwa ada tak hingga banyak pasangan prima yang selisihnya kurang dari 70 juta, dan batas itu kemudian diturunkan menjadi 246.

Inti Bab

Varian bukti Euklides membuktikan ketakhinggaan prima dalam banyak barisan aritmetika. Periksa modulo 3, 4, 6, dan 8 lebih dulu pada setiap soal prima; sering satu modulus sudah memaksa p bernilai kecil.

Karakterisasi $p \mid a^2 + 1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$ dan bentuk $2^n \pm 1$ menunjukkan bagaimana orde dan faktorisasi bekerja sama. Untuk soal konstruksi, ingat bahwa $N! + 2, \dots, N! + N$ adalah deretan bilangan komposit.

Latihan

- 9.1 ★** Tentukan semua prima p sehingga $8p^2 + 1$ prima.
- 9.2 ★** Tentukan semua prima p sehingga $p + 10$ dan $p + 14$ juga prima.
- 9.3 ★** Buktikan ada tak hingga banyak prima berbentuk $6k + 5$.
- 9.4 ★★** Buktikan bahwa jika p dan $p^2 + 8$ prima, maka $p^3 + 4$ juga prima.
- 9.5 ★★** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n^4 + n^2 + 1$ prima.
- 9.6 ★★** Misalkan p prima ganjil. Buktikan $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$.
- 9.7 ★★★** Tentukan semua prima p sehingga $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ kuadrat sempurna.

Kuadrat dan Pangkat

Kuadrat sempurna jarang, dan kelangkaan itu dapat dieksploitasi.

Di antara k^2 dan $(k + 1)^2$ tidak ada kuadrat lain; modulo 8, kuadrat hanya bersisa 0, 1, atau 4. Dua fakta sederhana ini, ditambah lema hasil kali bilangan relatif prima, menyelesaikan sebagian besar soal “kapan ekspresi ini kuadrat sempurna”.

IMO 2021 Soal 1 adalah contoh terbaru yang indah: kuncinya adalah menemukan tiga bilangan yang jumlah setiap pasanganya kuadrat. Bab ini melatih dua arah sekaligus: membuktikan sesuatu *bukan* kuadrat, dan membangun sesuatu yang *adalah* kuadrat.

PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai sisa kuadrat dan pangkat modulo bilangan kecil; (2) menjepit sebuah bilangan di antara dua kuadrat berurutan; (3) memakai lema “hasil kali bilangan relatif prima yang kuadrat”; (4) memparametrisasi tripel Pythagoras; (5) memakai argumen pertumbuhan untuk persamaan eksponensial.

10.1 Sisa kuadrat

Modulus	Sisa kuadrat	Sisa yang tidak mungkin
3	0, 1	2
4	0, 1	2, 3
5	0, 1, 4	2, 3
8	0, 1, 4	2, 3, 5, 6, 7
16	0, 1, 4, 9	lainnya

Kuadrat bilangan ganjil selalu $\equiv 1 \pmod{8}$, karena $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$ dan $k(k+1)$ genap.

 **CONTOH 10.1** Buktikan tidak ada bilangan $11 \dots 1$ (paling sedikit dua angka 1) yang merupakan kuadrat sempurna.

Solusi. Bilangan itu sama dengan $100m+11$ untuk suatu bilangan bulat $m \geq 0$, sehingga $\equiv 11 \equiv 3 \pmod{4}$, bukan sisa kuadrat. ■

 **CONTOH 10.2** Tentukan semua bilangan bulat $n \geq 0$ sehingga $2^n + 7$ kuadrat sempurna.

Solusi. Untuk $n \geq 3$, $2^n + 7 \equiv 7 \pmod{8}$, bukan sisa kuadrat. Periksa sisanya: $n = 0$ memberi 8, $n = 1$ memberi $9 = 3^2$, $n = 2$ memberi 11. Jawaban: $n = 1$. ■

10.2 Terjepit di antara dua kuadrat

Tidak ada kuadrat sempurna yang terletak *tegas* di antara k^2 dan $(k+1)^2$. Karena itu, jika kita dapat membuktikan $k^2 < N < (k+1)^2$, maka N bukan kuadrat.

 **CONTOH 10.3** Buktikan hasil kali empat bilangan asli berurutan tidak pernah kuadrat sempurna.

Solusi. Dari Bab 5, $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$. Untuk $n \geq 1$,

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^2 + 3n + 1)^2,$$

karena ketaksamaan pertama setara dengan $2(n^2 + 3n) > 0$. Jadi bilangan itu terjepit di antara dua kuadrat berurutan. ■

💡 STRATEGI Untuk polinomial $P(n)$ berderajat genap dengan koefisien utama kuadrat, carilah polinomial $Q(n)$ dengan $Q(n)^2 < P(n) < (Q(n) + 1)^2$ untuk semua n yang cukup besar, lalu periksa n kecil secara manual.

10.3 Hasil kali yang kuadrat

★ LEMA 10.1 Jika a, b bilangan asli dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$ dan ab kuadrat sempurna, maka a dan b masing-masing kuadrat sempurna. Lebih umum, jika $ab = c^k$, maka a dan b pangkat ke- k .

Bukti. Untuk setiap prima $p \mid a$, $p \nmid b$, sehingga $v_p(a) = v_p(ab) = k v_p(c)$ habis dibagi k . Jadi setiap eksponen dalam faktorisasi prima a habis dibagi k . $\square$

10.4 Tripel Pythagoras

★ TEOREMA 10.2 Semua solusi bilangan asli $x^2 + y^2 = z^2$ dengan $\text{FPB}(x, y, z) = 1$ dan y genap adalah

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

dengan $m > n \geq 1$, $\text{FPB}(m, n) = 1$, dan $m \not\equiv n \pmod{2}$.

Bukti. Karena primitif, x, y tidak keduanya genap; tidak keduanya ganjil pula (jumlah dua kuadrat ganjil $\equiv 2 \pmod{4}$). Jadi x ganjil, y genap, z ganjil. Tulis $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z-x}{2} \cdot \frac{z+x}{2}$. Kedua faktor di kanan relatif prima (pembagi persekutuannya membagi jumlah z dan selisih x), sehingga menurut lema keduanya kuadrat: $\frac{z+x}{2} = m^2$, $\frac{z-x}{2} = n^2$. Diperoleh rumus di atas. Syarat $\text{FPB}(m, n) = 1$ dan paritas berbeda diperlukan agar tripelnya primitif; sebaliknya rumus itu jelas memenuhi persamaan. $\square$

🔍 CONTOH 10.4 Tentukan semua segitiga siku-siku bersisi bilangan asli yang salah satu kakinya 12.

Solusi. Jika kaki lainnya b dan sisi miring c , maka $(c - b)(c + b) = 144$ dengan kedua faktor berparitas sama dan $c - b < c + b$. Pasangan genap $(2, 72), (4, 36), (6, 24), (8, 18)$ memberi $(b, c) = (35, 37), (16, 20), (9, 15), (5, 13)$. Ada empat segitiga. $\blacksquare$

10.5 Persamaan eksponensial dan pertumbuhan

 **CONTOH 10.5** Tentukan semua bilangan asli n dengan $3^n + 4^n = 5^n$.

Solusi. Bagi dengan 5^n : $\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$. Ruas kiri turun tegas terhadap n dan bernilai 1 di $n = 2$. Jadi $n = 2$ satu-satunya solusi. ■

 **CONTOH 10.6** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n \cdot 2^{n+1} + 1$ kuadrat sempurna.

Solusi. Misalkan $n \cdot 2^{n+1} + 1 = m^2$. Maka m ganjil, $m = 2k + 1$, dan $4k(k + 1) = n \cdot 2^{n+1}$, yaitu $k(k + 1) = n \cdot 2^{n-1}$. Salah satu dari $k, k + 1$ ganjil, sehingga yang genap habis dibagi 2^{n-1} dan paling sedikit 2^{n-1} ; yang lain paling sedikit $2^{n-1} - 1$. Maka $n \cdot 2^{n-1} \geq 2^{n-1}(2^{n-1} - 1)$, yaitu $2^{n-1} \leq n + 1$, sehingga $n \leq 3$. Pemeriksaan: $n = 1, 2, 3$ memberi 5, 17, $49 = 7^2$. Jawaban: $n = 3$. ■

10.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 10.7** Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n^2 + 2n + 12$ kuadrat sempurna.

Coretan pertama. $n = 1$: 15; $n = 2$: 20; $n = 3$: 27; $n = 4$: $36 = 6^2$. Satu solusi. $n = 5$: 47; $n = 6$: 60. Bilangan ini selalu sedikit di atas $(n + 1)^2$.

Dua jalur. Jalur pertama: jepit. $(n + 1)^2 < n^2 + 2n + 12$, dan $n^2 + 2n + 12 < (n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$ jika $2n > 8$, yaitu $n > 4$. Jadi untuk $n \geq 5$ bilangan itu terjepit di antara dua kuadrat berurutan, dan tinggal memeriksa $n \leq 4$. Jalur kedua: selisih kuadrat. Keduanya sah; jalur kedua lebih mekanis.

Solusi. Misalkan $n^2 + 2n + 12 = m^2$ dengan m bilangan asli. Maka $m^2 - (n + 1)^2 = 11$, yaitu $(m - n - 1)(m + n + 1) = 11$. Karena 11 prima dan faktor kedua positif dan lebih besar, $m - n - 1 = 1$ dan $m + n + 1 = 11$. Maka $m = 6$, $n = 4$. Pemeriksaan: $16 + 8 + 12 = 36$. ■

Refleksi. Kedua jalur mencerminkan dua ide utama bab ini: “tidak ada kuadrat di antara dua kuadrat berurutan” dan “selisih dua kuadrat terfaktor”. Jalur jepit lebih kuat untuk

ekspresi berderajat lebih tinggi (seperti Soal 10.4), sedangkan jalur faktorisasi paling cepat untuk ekspresi kuadrat.

10.7 Wawasan sejarah dan konteks

Tablet tanah liat Babilonia *Plimpton 322* (sekitar 1800 SM) memuat daftar yang umumnya ditafsirkan sebagai tripel Pythagoras, jauh sebelum Pythagoras sendiri. Rumus parametrisasi $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ ada dalam *Elemen* Euklides. Fermat membuktikan dengan *descent* bahwa $x^4 + y^4 = z^2$ tidak memiliki solusi tak nol, kasus $n = 4$ dari Teorema Terakhirnya.

Pertanyaan tentang pangkat sempurna juga melahirkan hasil modern yang dalam: Preda Mihăilescu membuktikan pada 2002 dugaan Catalan bahwa 8 dan 9 adalah satu-satunya pangkat sempurna berurutan. Soal olimpiade seperti $3^x = 2^y + 1$ (Soal 8.4) adalah kasus kecil dari teorema besar itu, yang untungnyanya dapat diselesaikan dengan modulo dan faktorisasi.

Inti Bab

Untuk membuktikan sesuatu bukan kuadrat: gunakan sisa modulo 3, 4, 5, 8, atau 16, atau jepit di antara dua kuadrat berurutan.

Untuk memanfaatkan kuadrat: jika ab kuadrat dan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka a dan b kuadrat. Lema ini yang memberi parametrisasi tripel Pythagoras. Untuk persamaan eksponensial, bagi dengan suku terbesar dan manfaatkan kemonotonan.

Latihan

- 10.1** ★ Buktikan jumlah kuadrat lima bilangan bulat berurutan tidak pernah kuadrat sempurna.
- 10.2** ★ Buktikan bilangan 2026 2026 ... 2026 (blok 2026 diulang berapa pun kali) bukan kuadrat sempurna.
- 10.3** ★ Tentukan semua bilangan bulat n sehingga $n^2 + n + 1$ kuadrat sempurna.
- 10.4** ★★ Buktikan $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ bukan kuadrat sempurna untuk $n \geq 1$.
- 10.5** ★★ Tentukan semua bilangan bulat $n \geq 0$ sehingga $2^n + 3^n$ kuadrat sempurna.
- 10.6** ★★ Tentukan semua bilangan asli x, y dengan $x^2 + 615 = 2^y$. (Olimpiade Balkan)

10.7 ★★ Tentukan semua pasangan bilangan asli (x, y) dengan $x^3 - y^3 = xy + 61$.

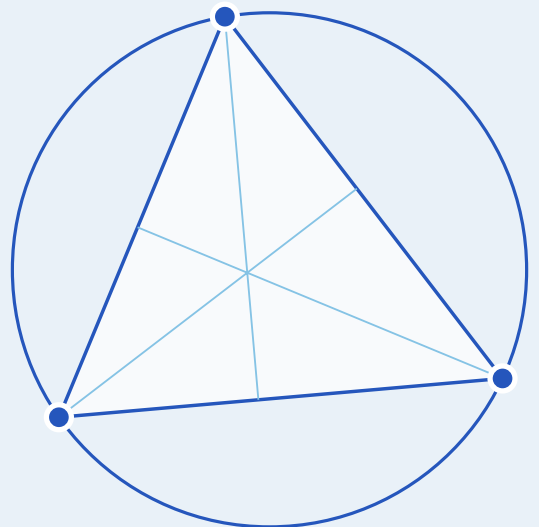
10.8 ★★★ Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, y) dengan $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$.
(IMO 2006)

BAGIAN



Geometri

Segitiga klasik, lingkaran, transformasi, koordinat dan vektor, serta titik-titik pusat segitiga. Setiap tahun ada satu atau dua soal geometri; bagian ini memberi dua jalan masuk, sintetis dan aljabar.



Segitiga Klasik

Segitiga adalah alfabet geometri. Setiap bangun datar dapat dipecah menjadi segitiga, dan hampir setiap soal geometri olimpiade akhirnya menayakan hubungan antara sisi, sudut, dan titik-titik istimewa segitiga.

Bab ini mengumpulkan rumus-rumus yang wajib dikuasai sampai otomatis: luas dalam empat bentuk, aturan sinus dan kosinus, Stewart, teorema garis bagi, Ceva, dan Menelaus. Tanpa kefasihan ini, peserta menghabiskan waktu berharga untuk menurunkan ulang rumus yang seharusnya langsung dipakai.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai rumus-rumus luas segitiga dan hubungannya dengan R dan r ; (2) memakai aturan sinus dan kosinus; (3) menghitung panjang garis berat dan garis bagi dengan teorema Stewart; (4) memakai teorema garis bagi, Ceva, dan Menelaus; (5) membuktikan ketaksamaan geometri sederhana.

11.1 Notasi dan rumus luas

Dalam segitiga ABC kita tulis $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, R jari-jari lingkaran luar, r jari-jari lingkaran dalam, dan Δ luas segitiga.

★ TEOREMA 11.1 (*Rumus luas*)

$$\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs = \frac{abc}{4R}.$$

Bukti. Rumus pertama: tinggi dari A adalah $b \sin C$. Rumus rs : bagi segitiga menjadi tiga segitiga dengan puncak di pusat lingkaran dalam I dan tinggi r , sehingga $\Delta = \frac{1}{2}r(a + b + c)$. Rumus $\frac{abc}{4R}$ mengikuti dari rumus pertama dan aturan sinus $c = 2R \sin C$. Rumus Heron diperoleh dengan menyubstitusikan $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ke $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$ dan memfaktorkan. $\square$

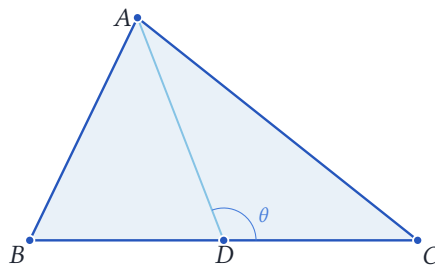
★ **TEOREMA 11.2** (Aturan sinus dan kosinus) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ dan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

🔗 **CONTOH 11.1** Segitiga ABC memiliki $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$. Hitung Δ , r , dan R .

Solusi. $s = 21$, sehingga $\Delta = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = \sqrt{7056} = 84$. Maka $r = \frac{\Delta}{s} = 4$ dan $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 13}{336} = \frac{65}{8}$. ■

11.2 Garis berat dan teorema Stewart

★ **TEOREMA 11.3** (Apollonius) Jika D titik tengah BC , maka $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$. Akibatnya panjang garis berat dari A adalah $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.



Gambar 11.1. Garis berat AD membagi BC sama panjang; sudut θ dan $180^\circ - \theta$ saling berpelurus.

Bukti. Misalkan $\theta = \angle ADC$, sehingga $\angle ADB = 180^\circ - \theta$, dan $BD = DC = m$. Aturan kosinus pada segitiga ADC dan ADB :

$$AC^2 = AD^2 + m^2 - 2AD \cdot m \cos \theta, \quad AB^2 = AD^2 + m^2 + 2AD \cdot m \cos \theta.$$

Jumlahkan kedua persamaan. $\square$

★ **TEOREMA 11.4** (Stewart) Jika D pada BC dengan $BD = m$, $DC = n$ (jadi $a = m+n$) dan $AD = d$, maka $b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$.

Bukti. Sama seperti di atas: $c^2 = d^2 + m^2 + 2dm \cos \theta$ dan $b^2 = d^2 + n^2 - 2dn \cos \theta$. Kalikan persamaan pertama dengan n , kedua dengan m , lalu jumlahkan: $c^2n + b^2m = (m+n)d^2 + mn(m+n)$. $\square$

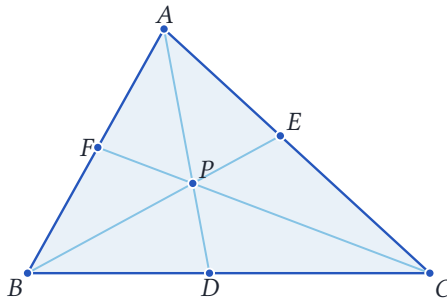
11.3 Garis bagi, Ceva, dan Menelaus

★ **TEOREMA 11.5** (Teorema garis bagi) Jika garis bagi dalam sudut A memotong BC di D , maka $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Bukti. Segitiga ABD dan ACD memiliki tinggi yang sama dari A , sehingga $\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{BD}{DC}$. Di sisi lain $\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \frac{A}{2}}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \frac{A}{2}} = \frac{AB}{AC}$. $\square$

★ **TEOREMA 11.6** (Ceva) Titik D, E, F terletak pada sisi BC, CA, AB (bukan di titik sudut). Garis AD, BE, CF melalui satu titik jika dan hanya jika

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$



Gambar 11.2. Tiga garis sudut (cevan) yang bertemu di P .

Bukti. Jika ketiganya bertemu di P , maka $\frac{BD}{DC} = \frac{[ABP]}{[ACP]}$ (segitiga ABD, ACD dan PBD, PCD berbagi tinggi, lalu kurangkan). Dengan cara sama $\frac{CE}{EA} = \frac{[BCP]}{[BAP]}$ dan

$\frac{AF}{FB} = \frac{[CAP]}{[CBP]}$. Hasil kalinya 1. Sebaliknya, jika hasil kalinya 1, misalkan AD dan BE bertemu di P dan CP memotong AB di F' . Dari arah pertama, $\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}$, sehingga $F = F'$. □

CONTOH 11.2 Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA, AB di D, E, F . Buktikan AD, BE, CF bertemu di satu titik (titik Gergonne).

Solusi. Panjang garis singgung dari satu titik ke lingkaran sama, sehingga $AE = AF = s - a$, $BD = BF = s - b$, $CD = CE = s - c$. Maka

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} = 1,$$

dan menurut Ceva ketiga garis bertemu di satu titik. ■

★ TEOREMA 11.7 (Menelaus) Sebuah garis memotong garis BC, CA, AB di D, E, F (tidak di titik sudut). Dengan panjang berarah, $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$. Sebaliknya, jika hasil kali ini -1 , maka D, E, F segaris.

💡 STRATEGI Ceva untuk *keseRentakan* (tiga garis melalui satu titik), Menelaus untuk *kesegarisan* (tiga titik pada satu garis). Keduanya mengubah pernyataan geometri menjadi perhitungan perbandingan, yang biasanya diperoleh dari garis bagi, garis singgung, atau luas.

11.4 Ketaksamaan dalam segitiga

CONTOH 11.3 (IMO 1961) Buktikan $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \Delta$, dengan kesamaan jika dan hanya jika segitiga sama sisi.

Solusi. Dengan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ dan $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C$,

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3} \Delta = 2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos C + \sqrt{3} \sin C) = 2a^2 + 2b^2 - 4ab \cos(C - 60^\circ).$$

Karena $\cos(C - 60^\circ) \leq 1$, ruas kanan paling sedikit $2a^2 + 2b^2 - 4ab = 2(a - b)^2 \geq 0$. Kesamaan memerlukan $a = b$ dan $C = 60^\circ$. ■

11.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 11.4** Segitiga ABC memiliki $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Tentukan luas, jari-jari lingkaran dalam dan luar, serta panjang garis berat terpanjang.

Perencanaan. Tiga sisi diketahui, jadi semua besaran dapat dihitung. Urutan kerja yang efisien: Heron untuk luas; lalu $r = \frac{\Delta}{s}$ dan $R = \frac{abc}{4\Delta}$; lalu Apollonius untuk garis berat. Garis berat terpanjang adalah yang ditarik ke sisi *terpendek*, karena $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ membesar ketika a mengecil.

Solusi. $s = 9$, dan Heron memberi $\Delta = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$. Maka $r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ dan $R = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 6\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$. Garis berat ke sisi $a = 5$: $m_a^2 = \frac{2 \cdot 36 + 2 \cdot 49 - 25}{4} = \frac{145}{4}$, jadi $m_a = \frac{\sqrt{145}}{2}$. ■

Pemeriksaan kewajaran. $R \approx 3,57 \geq 2r \approx 3,27$, sesuai ketaksamaan Euler. Garis berat $m_a \approx 6,02$ lebih pendek dari $\frac{b+c}{2} = 6,5$, sesuai ketaksamaan segitiga pada jajaran genjang yang dibentuk garis berat. Pemeriksaan kewajaran seperti ini, meskipun kasar, sering menangkap kesalahan hitung.

Refleksi. Soal hitung geometri di olimpiade jarang sesederhana ini, tetapi kelancaran di sini adalah prasyarat: peserta yang harus menurunkan ulang Heron atau Apollonius di tengah ujian kehilangan waktu yang seharusnya dipakai untuk ide.

11.6 Wawasan sejarah dan konteks

Rumus luas yang dinamai Heron dari Aleksandria (abad pertama) mungkin sudah dikenal Archimedes. Menelaus dari Aleksandria (sekitar tahun 100) membuktikan teoremanya untuk segitiga bola, dan Giovanni Ceva menerbitkan teoremanya pada 1678; versi trigonometrinya sudah dikenal lebih awal di dunia Islam abad pertengahan. Matthew Stewart menerbitkan teoremanya pada 1746.

Geometri segitiga mengalami “masa keemasan” pada akhir abad ke-19, ketika ratusan titik dan garis istimewa ditemukan. Kini *Encyclopedia of Triangle Centers* yang dikelola Clark Kimberling mencatat puluhan ribu titik pusat segitiga, dan setiap soal geometri olimpiade dapat dipandang sebagai hubungan kecil di dalam jaringan besar itu.

Inti Bab

Empat rumus luas, $\frac{1}{2}ab \sin C$, Heron, rs , dan $\frac{abc}{4R}$, menghubungkan Δ , r , R , dan sisi-sisi. Aturan sinus dan kosinus mengubah sudut menjadi panjang dan sebaliknya.

Ceva adalah alat untuk keserentakan, Menelaus untuk keseгарisan; keduanya mengubah pernyataan geometri menjadi perkalian perbandingan. Contoh IMO 1961 menunjukkan bahwa ketaksamaan geometri sering hanyalah AM-GM atau $\cos \leq 1$ yang menyamar.

Latihan

- 11.1** ★ Hitung Δ , r , dan R untuk segitiga bersisi 7, 8, 9.
- 11.2** ★ Pada segitiga siku-siku di C , buktikan $r = \frac{a+b-c}{2}$.
- 11.3** ★ Pada segitiga dengan $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$, hitung panjang garis tinggi dan garis berat dari A .
- 11.4** ★★ Buktikan panjang garis bagi dari A adalah $d_a^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right)$.
- 11.5** ★★ Lingkaran singgung luar di hadapan A menyinggung BC di D ; didefinisikan E, F secara serupa. Buktikan AD, BE, CF bertemu di satu titik (titik Nagel).
- 11.6** ★★ Buktikan garis berat segitiga membagi segitiga menjadi enam segitiga kecil dengan luas sama.
- 11.7** ★★★ Titik P di dalam segitiga ABC . Garis melalui P sejajar sisi-sisi segitiga membagi segitiga menjadi tiga jajaran genjang dan tiga segitiga kecil dengan luas $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Buktikan $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2} + \sqrt{\Delta_3}$.

Lingkaran

Lingkaran mengubah sudut menjadi informasi. Begitu empat titik terbukti konsiklis, puluhan kesamaan sudut muncul sekaligus; begitu sebuah titik dihubungkan dengan lingkaran melalui kuasa titik, panjang-panjang yang tampak tak berhubungan menjadi terikat.

Hampir setiap soal geometri IMO 2017–2026 memakai setidaknya satu teknik dari bab ini. IMO 2020 Soal 1 selesai begitu kita melihat segi empat talibusur yang tersembunyi; IMO 2019 Soal 2 dimulai dari teorema Reim; IMO 2026 Soal 2 dapat dirumuskan ulang sebagai kesamaan dua kuasa titik. Bab ini adalah fondasi Bagian III.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai teorema sudut keliling dan kriteria segi empat talibusur; (2) memakai sudut antara garis singgung dan tali busur; (3) menghitung dengan kuasa titik; (4) memakai sumbu radikal dan pusat radikal; (5) memakai teorema Ptolemy.

12.1 Sudut keliling dan segi empat talibusur

★ **TEOREMA 12.1** (*Sudut keliling*) *Sudut keliling yang menghadap busur BC sama dengan setengah sudut pusat yang menghadap busur yang sama. Akibatnya, semua sudut keliling yang menghadap busur yang sama besarnya sama, dan sudut keliling yang menghadap diameter adalah 90° .*

Sketsa bukti. Jika pusat O terletak pada sisi AB dari sudut keliling $\angle BAC$, segitiga OAC sama kaki sehingga sudut luar $\angle BOC = 2\angle OAC$. Kasus umum diperoleh dengan menambah atau mengurangi dua sudut kasus khusus ini melalui diameter dari A . $\square$

★ **TEOREMA 12.2** (Kriteria talibusur) Untuk segi empat konveks $ABCD$, pernyataan berikut setara: (i) A, B, C, D terletak pada satu lingkaran; (ii) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; (iii) $\angle ABD = \angle ACD$.

★ **TEOREMA 12.3** (Sudut singgung–tali busur) Jika t garis singgung lingkaran di A dan AB tali busur, maka sudut antara t dan AB sama dengan sudut keliling yang menghadap busur AB dari sisi lain.

✎ **CONTOH 12.1** Pada segitiga lancip ABC , BE dan CF garis tinggi. Buktikan B, C, E, F konsiklis dan $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

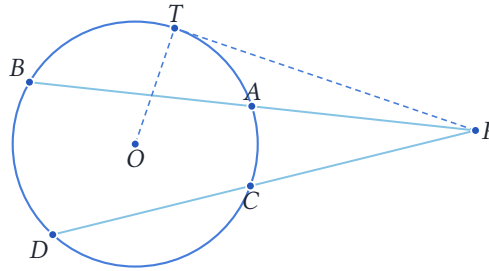
Solusi. $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$, sehingga E dan F terletak pada lingkaran berdiameter BC . Bagian kedua adalah kuasa titik A terhadap lingkaran itu (Teorema 12.4 di bawah). ■

12.2 Kuasa titik

★ **TEOREMA 12.4** (Kuasa titik) Misalkan ω lingkaran berpusat O berjari-jari r , dan P sebuah titik. Jika garis melalui P memotong ω di A dan B , maka

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PO^2 - r^2,$$

dengan panjang berarah (negatif bila P di dalam lingkaran). Bilangan ini disebut **kuasa** P terhadap ω , ditulis $\text{Kuasa}(P, \omega)$. Jika PT menyinggung ω di T , maka $PT^2 = \text{Kuasa}(P, \omega)$.

Gambar 12.1. Kuasa titik: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2$.

Bukti. Tarik garis melalui P dan O yang memotong ω di X, Y ; maka $\overline{PX} \cdot \overline{PY} = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2$. Untuk garis lain PAB , segitiga PAX dan PYB sebangun (sudut di P sama, dan $\angle PAX = \angle PYB$ karena A, B, X, Y konsiklis), sehingga $PA \cdot PB = PX \cdot PY$. Untuk garis singgung, gunakan Pythagoras pada segitiga siku-siku OTP . $\square$

CONTOH 12.2 Dua tali busur AB dan CD berpotongan di P dengan $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 2$. Tentukan PD . Titik Q berjarak 13 dari pusat lingkaran berjari-jari 5; tentukan panjang garis singgung dari Q .

Solusi. $PC \cdot PD = PA \cdot PB = 12$, jadi $PD = 6$. Panjang garis singgung dari Q adalah $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. $\blacksquare$

12.3 Sumbu radikal dan pusat radikal

★ TEOREMA 12.5 Untuk dua lingkaran tak sepusat, himpunan titik yang kuasanya terhadap kedua lingkaran sama adalah sebuah garis yang tegak lurus garis pusat. Garis ini disebut **sumbu radikal**. Jika kedua lingkaran berpotongan di A, B , sumbu radikalnya adalah garis AB . Untuk tiga lingkaran yang pusatnya tidak segaris, ketiga sumbu radikalnya bertemu di satu titik (**pusat radikal**).

Bukti. Dengan koordinat, $\text{Kuasa}(P, \omega_i) = |P - O_i|^2 - r_i^2$. Selisih kedua kuasa adalah fungsi linear dari P (suku $|P|^2$ hilang), sehingga himpunan nolnya sebuah garis tegak lurus O_1O_2 . Jika P berkuasa sama terhadap ω_1, ω_2 dan terhadap ω_2, ω_3 , maka juga terhadap ω_1, ω_3 . $\square$

🔍 **CONTOH 12.3** Dua lingkaran berpotongan di A dan B . Titik P pada garis AB di luar ruas AB . Buktikan panjang garis singgung dari P ke kedua lingkaran sama.

Solusi. Kuadrat kedua panjang singgung sama dengan $PA \cdot PB$, yaitu kuasa P terhadap masing-masing lingkaran. ■

💡 **STRATEGI** Jika soal meminta membuktikan tiga garis bertemu, periksa apakah ketiganya dapat dipandang sebagai sumbu radikal dari tiga lingkaran. Jika soal meminta membuktikan empat titik konsiklis, coba tunjukkan $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ untuk titik potong P yang tepat.

12.4 Teorema Ptolemy

★ **TEOREMA 12.6** (Ptolemy) Untuk segi empat talibusur $ABCD$ berlaku $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Bukti. Pilih E pada AC dengan $\angle ABE = \angle DBC$. Karena $\angle BAE = \angle BAC = \angle BDC$, segitiga ABE dan DBC sebangun, sehingga $AE = \frac{AB \cdot CD}{BD}$. Juga $\angle ABD = \angle EBC$ dan $\angle ADB = \angle ACB = \angle ECB$, sehingga segitiga ABD dan EBC sebangun dan $EC = \frac{AD \cdot BC}{BD}$. Jumlahkan: $AC = AE + EC$. □

🔍 **CONTOH 12.4** Segitiga sama sisi ABC memiliki lingkaran luar ω , dan P pada busur BC yang tidak memuat A . Buktikan $PA = PB + PC$.

Solusi. $ABPC$ talibusur. Ptolemy memberi $PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$. Karena $AB = BC = CA$, bagilah dengan panjang sisi. ■

12.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi

🔍 **CONTOH 12.5** Pada segitiga lancip ABC , BE dan CF adalah garis tinggi. Buktikan garis singgung lingkaran luar ABC di A sejajar EF .

Menggambar. Gambar yang akurat menunjukkan EF “miring berlawanan” dengan BC : segitiga AEF tampak seperti ABC yang dicerminkan. Dugaan: segitiga AEF sebangun

dengan ABC dengan pasangan sudut tertukar, yaitu $\angle AFE = \angle ACB$ dan $\angle AEF = \angle ABC$.

Mencari lingkaran. Sudut siku-siku di E dan F yang menghadap BC menunjukkan bahwa B, C, E, F konsiklis. Dari sini sudut $\angle AFE$ dapat dipindahkan ke sudut di C . Garis singgung di A menghasilkan sudut yang sama melalui teorema sudut singgung–tali busur. Dua sudut yang sama dengan sudut ketiga saling sama.

Solusi. Karena $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$, titik B, C, E, F terletak pada lingkaran berdiameter BC . Pada segi empat talibusur $BCEF$, sudut luar di F sama dengan sudut dalam di seberangnya: $\angle AFE = \angle ACB$. Misalkan t garis singgung di A . Menurut teorema sudut singgung–tali busur, sudut antara t dan AB (di pihak yang berseberangan dengan C) sama dengan $\angle ACB$. Maka sudut antara t dan AB sama dengan sudut antara FE dan AB , dengan posisi dalam berseberangan, sehingga $t \parallel EF$. ■

Refleksi. Hasil ini berarti $OA \perp EF$ (karena OA tegak lurus garis singgung), fakta yang sangat sering dipakai: jari-jari ke suatu titik sudut tegak lurus “garis kaki” di hadapannya. Pola berpikirnya: gambar akurat $\rightarrow$ dugaan sudut $\rightarrow$ cari lingkaran yang membenarkan pemindahan sudut.

12.6 Wawasan sejarah dan konteks

Teorema sudut keliling terdapat dalam Buku III *Elemen* Euklides. Claudius Ptolemaeus memakai teoremnya dalam *Almagest* (abad ke-2) untuk menyusun tabel tali busur, pendahulu tabel sinus, yang dipakai astronom selama lebih dari seribu tahun. Istilah “kuasa titik” (*Potenz*) diperkenalkan Jakob Steiner pada 1826, dan konsep sumbu radikal dikembangkan dalam geometri proyektif abad ke-19.

Di IMO, soal geometri hampir selalu melibatkan lingkaran. Kemampuan melihat segi empat talibusur yang tersembunyi, seperti $BCEF$ di atas, adalah keterampilan tunggal yang paling menentukan keberhasilan dalam geometri olimpiade.

Inti Bab

Sudut keliling dan kriteria talibusur adalah alat paling sering dipakai: *kejar sudut sampai empat titik terbukti konsiklis*, lalu manfaatkan lingkarannya.

Kuasa titik menghubungkan panjang ruas, dan sumbu radikal mengubah kese rentakan tiga garis menjadi kesamaan kuasa. Ptolemy mengikat keenam panjang segi empat talibusur dalam satu persamaan.

Latihan

- 12.1** ★ Dari titik P di luar lingkaran ditarik garis yang memotong lingkaran di A dan B dengan $PA = 4$ dan $AB = 5$. Tentukan panjang garis singgung dari P .
- 12.2** ★ Buktikan bahwa jajaran genjang yang talibusur adalah persegi panjang.
- 12.3** ★ Segi empat talibusur $ABCD$ memiliki $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $DA = 6$. Tentukan $AC \cdot BD$.
- 12.4** ★★ Pada segi empat talibusur $ABCD$ berlaku $AB = BC$. Buktikan DB membagi dua sudut ADC .
- 12.5** ★★ Dua lingkaran menyinggung di luar di T . Garis singgung persekutuan luar menyinggung keduanya di A dan B . Buktikan $\angle ATB = 90^\circ$.
- 12.6** ★★ Diberikan tiga lingkaran yang saling berpotongan sepasang-sepasang. Buktikan ketiga tali busur persekutuannya bertemu di satu titik atau sejajar.
- 12.7** ★★★ Lingkaran ω berdiameter AB . Titik C, D pada ω di sisi yang sama terhadap AB , dan AC, BD berpotongan di E . Buktikan $AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB^2$.

Transformasi Geometri

Transformasi memindahkan masalah ke tempat yang lebih mudah.

Refleksi meluruskan lintasan yang berbelok; rotasi mengumpulkan panjang-panjang yang terpencar; homoteti menjelaskan mengapa titik-titik istimewa segaris; inversi mengubah lingkaran menjadi garis.

Keindahan pendekatan ini adalah bahwa ia menjelaskan *mengapa* sebuah fakta benar, bukan sekadar memverifikasinya. Garis Euler, misalnya, bukan kebetulan perhitungan: ia adalah akibat langsung dari homoteti berpusat di titik berat. Di IMO 2017 Soal 4, pencerminan terhadap titik tengah mengungkap jajaran genjang yang menjadi kunci.

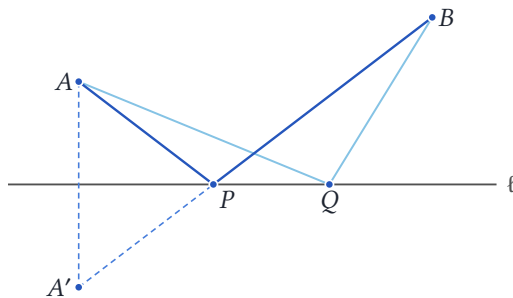
🕒 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai refleksi untuk masalah lintasan terpendek; (2) memakai rotasi untuk memindahkan panjang yang terpencar; (3) memakai homoteti, termasuk untuk membuktikan garis Euler; (4) mengenal inversi dan sifat-sifat dasarnya.

13.1 Refleksi

Refleksi terhadap garis ℓ mempertahankan jarak dan membalik orientasi. Titik pada ℓ tetap, sehingga untuk $P \in \ell$ berlaku $PA = PA'$ dengan A' bayangan A .

🔍 **CONTOH 13.1** (*Masalah Heron*) Titik A dan B berada di sisi yang sama terhadap garis ℓ . Tentukan titik P pada ℓ yang meminimumkan $PA + PB$.


 Gambar 13.1. Lintasan terpendek: $PA + PB = PA' + PB \geq A'B$.

Solusi. Misalkan A' bayangan A terhadap ℓ . Untuk setiap $Q \in \ell$, $QA + QB = QA' + QB \geq A'B$, dengan kesamaan jika dan hanya jika Q terletak pada ruas $A'B$. Jadi P adalah titik potong $A'B$ dengan ℓ ; pada titik ini, AP dan BP membentuk sudut sama dengan ℓ (hukum pemantulan cahaya). ■

13.2 Rotasi

Rotasi dengan pusat O dan sudut θ mempertahankan jarak dan sudut. Rotasi 60° sangat berguna: jika B dirotasi menjadi B' terhadap O , segitiga OBB' sama sisi.

CONTOH 13.2 Titik P di dalam segitiga sama sisi ABC memenuhi $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$. Tentukan panjang sisi segitiga.

Solusi. Rotasikan bidang terhadap B sebesar 60° sehingga $A \mapsto C$. Misalkan $P \mapsto P'$. Maka $BP' = BP = 4$ dan $\angle PBP' = 60^\circ$, sehingga segitiga BPP' sama sisi dan $PP' = 4$. Juga $CP' = AP = 3$. Segitiga $PP'C$ bersisi 4, 3, 5, jadi siku-siku di P' . Maka $\angle BP'C = \angle BP'P + \angle PP'C = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Aturan kosinus pada segitiga $BP'C$:

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 150^\circ = 25 + 12\sqrt{3}.$$

Jadi panjang sisinya $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$. ■

CONTOH 13.3 Di luar segitiga ABC dibuat persegi $ABDE$ dan $ACFG$ (dengan D, E di luar dan F, G di luar). Buktikan $BG = CE$ dan $BG \perp CE$.

Solusi. Rotasi 90° terhadap A (ke arah yang tepat) memetakan $E \mapsto B$ dan $C \mapsto G$, sebab $AE = AB$, $AC = AG$ dan kedua sudut $\angle EAB$, $\angle CAG$ siku-siku dengan orientasi

sama. Jadi ruas EC dipetakan ke ruas BG : panjangnya sama dan keduanya membentuk sudut 90° . ■

💡 STRATEGI Jika soal memuat beberapa ruas yang berawal dari satu titik dan sebuah segitiga sama sisi atau persegi, cobalah rotasi 60° atau 90° terhadap titik sudut itu. Rotasi “mengumpulkan” panjang-panjang yang terpecah menjadi satu segitiga.

13.3 Homoteti dan garis Euler

📖 DEFINISI 13.1 Homoteti dengan pusat O dan faktor $k \neq 0$ memetakan P ke P' dengan $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$.

Homoteti memetakan garis ke garis yang sejajar, lingkaran ke lingkaran, dan mengalikan semua panjang dengan $|k|$.

★ TEOREMA 13.2 (*Garis Euler*) Pada setiap segitiga, pusat lingkaran luar O , titik berat G , dan titik tinggi H segaris, dengan $GH = 2OG$.

Bukti. Homoteti $\mathcal{H}$ dengan pusat G dan faktor $-\frac{1}{2}$ memetakan A, B, C ke titik tengah M_a, M_b, M_c sisi-sisi di hadapannya (karena G membagi garis berat dengan perbandingan $2 : 1$). Garis tinggi dari A tegak lurus BC ; bayangannya adalah garis melalui M_a yang sejajar garis tinggi, yaitu tegak lurus BC : inilah sumbu BC . Jadi $\mathcal{H}$ memetakan ketiga garis tinggi ke ketiga sumbu sisi, sehingga memetakan H ke O . Berarti $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. □

★ TEOREMA 13.3 (*Lingkaran sembilan titik*) Titik tengah ketiga sisi, kaki ketiga garis tinggi, dan titik tengah AH, BH, CH terletak pada satu lingkaran berjari-jari $\frac{R}{2}$ yang berpusat di titik tengah OH .

Sketsa bukti. Homoteti berpusat H dengan faktor $\frac{1}{2}$ memetakan lingkaran luar ke lingkaran $\mathcal{N}$ berjari-jari $\frac{R}{2}$ yang berpusat di titik tengah OH . Bayangan A, B, C adalah titik tengah HA, HB, HC . Bayangan pantulan H terhadap sisi-sisi (yang terletak pada lingkaran luar, lihat Bab 15) adalah kaki garis tinggi, dan bayangan titik antipodal dari A adalah titik tengah BC . □

13.4 Inversi

■ **DEFINISI 13.4** **Inversi** dengan pusat O dan jari-jari k memetakan titik $P \neq O$ ke titik P^* pada sinar OP dengan $OP \cdot OP^* = k^2$.

★ **TEOREMA 13.5** (*Sifat dasar inversi*) (1) Garis melalui O dipetakan ke dirinya sendiri. (2) Garis yang tidak melalui O dipetakan ke lingkaran melalui O , dan sebaliknya. (3) Lingkaran yang tidak melalui O dipetakan ke lingkaran yang tidak melalui O . (4) Sudut antarkurva dipertahankan besarnya. (5) $P^*Q^* = \frac{k^2 PQ}{OP \cdot OQ}$.

Bukti (5). Dari $OP \cdot OP^* = OQ \cdot OQ^*$, segitiga OPQ dan OQ^*P^* sebangun (sudut di O sama), dengan rasio $\frac{OQ^*}{OP} = \frac{k^2}{OP \cdot OQ}$. □

✎ **CONTOH 13.4** (*Ketaksamaan Ptolemy*) Untuk sembarang empat titik A, B, C, D berlaku $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$.

Solusi. Lakukan inversi berpusat A dengan jari-jari 1. Dengan sifat (5), ketaksamaan segitiga $B^*C^* + C^*D^* \geq B^*D^*$ menjadi

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \geq \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

Kalikan dengan $AB \cdot AC \cdot AD$. Kesamaan terjadi jika C^* terletak pada ruas B^*D^* , yaitu jika $ABCD$ talibusur (dengan urutan itu), sehingga teorema Ptolemy adalah kasus kesamaannya. ■

13.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi

✎ **CONTOH 13.5** Kota A dan B terletak di seberang sungai yang lurus dengan lebar d (tepi sungai berupa dua garis sejajar). Jembatan harus dibangun tegak lurus tepi sungai. Di mana jembatan harus dibangun agar lintasan dari A ke B sependek mungkin?

Coretan pertama. Panjang jembatan selalu d , jadi yang diminimumkan adalah $AP + QB$, dengan P dan Q ujung jembatan pada tepi masing-masing, PQ tegak lurus tepi.

Kesulitannya: dua ruas AP dan QB tidak bersambung, sehingga ketaksamaan segitiga tidak langsung berlaku.

Ide: translasi. Geser B sejauh d tegak lurus sungai ke arah A , menjadi B' . Maka $QB = PB'$ karena $PQBB'$ jajaran genjang. Dua ruas yang terpisah kini tersambung di P .

Solusi. Misalkan $\vec{v}$ vektor tegak lurus sungai dengan panjang d dari tepi A ke tepi B , dan $B' = B - \vec{v}$. Untuk jembatan PQ dengan $Q = P + \vec{v}$, segi empat $PQBB'$ jajaran genjang, jadi $QB = PB'$. Panjang lintasan $AP + d + QB = AP + PB' + d \geq AB' + d$, dengan kesamaan jika dan hanya jika P terletak pada ruas AB' . Jadi jembatan dibangun di titik potong AB' dengan tepi sungai di sisi A . ■

Refleksi. Masalah Heron di bab ini memakai refleksi untuk “meluruskan” lintasan yang memantul; di sini translasi meluruskan lintasan yang “terputus”. Keduanya adalah contoh strategi umum: pilih transformasi yang membawa bagian-bagian soal ke posisi di mana ketaksamaan segitiga atau kesegarisan dapat dipakai.

13.6 Wawasan sejarah dan konteks

Masalah pemantulan cahaya dibahas Heron dari Aleksandria dalam *Catoptrica*, dengan kesimpulan bahwa cahaya mengambil lintasan terpendek, cikal bakal prinsip Fermat dalam optika. Felix Klein, dalam Program Erlangen (1872), mengusulkan bahwa setiap geometri ditentukan oleh kelompok transformasi yang mempertahankannya: geometri Euklides oleh isometri, geometri kesebangunan oleh homoteti dan isometri, dan geometri inversif oleh transformasi Möbius.

Teorema Napoleon sering dikaitkan dengan Napoleon Bonaparte, yang memang menyukai matematika, tetapi atribusinya diragukan; versi tertulis pertamanya muncul dalam jurnal matematika populer Inggris pada 1820-an. Inversi berkembang pada abad ke-19 dan menjadi senjata ampuh untuk soal-soal yang dipenuhi lingkaran yang bersinggungan.

Inti Bab

Refleksi untuk lintasan terpendek, rotasi 60° atau 90° untuk konfigurasi dengan segitiga sama sisi atau persegi, homoteti untuk titik-titik segaris dan lingkaran yang bersinggungan, inversi untuk konfigurasi yang dipenuhi lingkaran melalui satu titik.

Pertanyaan yang harus selalu diajukan: *transformasi apa yang memetakan sebagian gambar ke bagian lain?* Jika jawabannya ada, separuh soal sudah selesai.

Latihan

- 13.1** ★ Diberikan $A(0, 3)$ dan $B(6, 5)$. Tentukan titik P pada sumbu- x yang meminimumkan $PA + PB$, beserta nilai minimumnya.
- 13.2** ★ Buktikan komposisi dua refleksi terhadap garis yang berpotongan di O dengan sudut α adalah rotasi berpusat O dengan sudut 2α .
- 13.3** ★★ Pada setiap sisi segitiga ABC dibuat segitiga sama sisi di luar. Buktikan pusat-pusat ketiga segitiga itu membentuk segitiga sama sisi (teorema Napoleon).
- 13.4** ★★ Di luar segitiga ABC dibuat persegi $ABDE$ dan $ACFG$. Misalkan M titik tengah BC . Buktikan $AM \perp EG$ dan $EG = 2AM$.
- 13.5** ★★ Buktikan pantulan titik tinggi H terhadap titik tengah BC adalah titik pada lingkaran luar yang berseberangan diametral dengan A .
- 13.6** ★★★ Titik P di dalam persegi $ABCD$ memenuhi $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$. Tentukan $\angle APB$.

Koordinat, Vektor, dan Bilangan Kompleks

Ketika sintesis buntu, aljabar tidak pernah menolak. Koordinat, vektor, dan bilangan kompleks mengubah soal geometri menjadi perhitungan. Perhitungan itu mungkin panjang, tetapi pasti, dan di bawah tekanan ujian kepastian sangat berharga.

Kuncinya adalah memilih sistem yang tepat. Dengan pusat lingkaran luar sebagai titik asal, titik tinggi menjadi sekadar $A + B + C$, dan garis Euler serta rumus OH^2 jatuh dalam dua baris. Banyak peserta IMO 2025 menyelesaikan Soal 2 dengan koordinat setelah mengenali beberapa fakta sudut; bab ini melatih keterampilan untuk menempuh jalur itu dengan aman.

📍 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menghitung luas dengan rumus tali sepatu; (2) memakai vektor untuk titik berat, titik tinggi, dan identitas jarak; (3) membuktikan garis Euler dan rumus OH^2 secara aljabar; (4) memakai bilangan kompleks untuk rotasi dan segitiga sama sisi.

14.1 Koordinat Kartesius

Jarak dua titik: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Titik yang membagi AB dengan perbandingan $m : n$ adalah $\frac{nA+mB}{m+n}$.

★ **TEOREMA 14.1** (*Rumus tali sepatu*) Luas poligon sederhana dengan titik sudut $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ (berurutan) adalah

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|, \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1).$$

✎ **CONTOH 14.1** Hitung luas segitiga dengan titik sudut $(1, 2), (4, 6), (7, 1)$.

Solusi. $\sum (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = (1 \cdot 6 - 4 \cdot 2) + (4 \cdot 1 - 7 \cdot 6) + (7 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -2 - 38 + 13 = -27$.
Luasnya $\frac{27}{2}$. ■

14.2 Vektor

Kita samakan titik dengan vektor posisinya. Hasil kali titik memenuhi $|X|^2 = X \cdot X$, dan $X \perp Y$ jika dan hanya jika $X \cdot Y = 0$. Titik berat segitiga adalah $G = \frac{A+B+C}{3}$.

★ **TEOREMA 14.2** (*Leibniz*) Untuk setiap titik P : $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Bukti. Ambil G sebagai titik asal, sehingga $A + B + C = 0$. Maka $\sum |P - A|^2 = 3|P|^2 - 2P \cdot (A + B + C) + \sum |A|^2 = 3|P|^2 + \sum |A|^2$. □

★ **AKIBAT 14.3** Tempat kedudukan titik P dengan $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k$ adalah lingkaran berpusat G (atau satu titik, atau kosong).

14.3 Titik tinggi dengan pusat lingkaran luar sebagai titik asal

★ **TEOREMA 14.4** Ambil pusat lingkaran luar O sebagai titik asal, sehingga $|A| = |B| = |C| = R$. Maka titik tinggi adalah $H = A + B + C$. Akibatnya $H = 3G$ (garis Euler) dan

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Bukti. $(H - A) \cdot (B - C) = (B + C) \cdot (B - C) = |B|^2 - |C|^2 = 0$, jadi $AH \perp BC$; demikian pula untuk B dan C . Selanjutnya $c^2 = |A - B|^2 = 2R^2 - 2A \cdot B$, sehingga $A \cdot B = R^2 - \frac{c^2}{2}$. Maka

$$OH^2 = |A + B + C|^2 = 3R^2 + 2(A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A) = 3R^2 + 6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \quad \square$$

★ **AKIBAT 14.5** $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $O = H$, yaitu segitiga sama sisi.

14.4 Bilangan kompleks

Titik pada bidang dapat dipandang sebagai bilangan kompleks $z = x + iy$. Rotasi terhadap titik asal sebesar θ adalah perkalian dengan $e^{i\theta}$; rotasi terhadap titik c adalah $z \mapsto c + e^{i\theta}(z - c)$. Tiga titik a, b, c segaris jika dan hanya jika $\frac{c-a}{b-a}$ real, dan $AB \perp CD$ jika dan hanya jika $\frac{b-a}{d-c}$ imajiner murni.

★ **TEOREMA 14.6** Misalkan $\omega = e^{2\pi i/3}$. Segitiga abc (berorientasi berlawanan arah jarum jam) sama sisi jika dan hanya jika $a + \omega b + \omega^2 c = 0$.

Bukti. Segitiga abc berlawanan arah jarum jam sama sisi jika dan hanya jika $c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$. Karena $e^{i\pi/3} = -\omega^2$ dan $1 + \omega^2 = -\omega$, persamaan ini setara dengan $c = a - \omega^2 b + \omega^2 a = -\omega a - \omega^2 b$, yaitu $\omega a + \omega^2 b + c = 0$. Kalikan dengan ω^2 (ingat $\omega^3 = 1$): $a + \omega b + \omega^2 c = 0$. □

🔍 **CONTOH 14.2** Titik z_1, z_2, z_3 pada lingkaran satuan memenuhi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Buktikan segitiganya sama sisi.

Solusi. Pusat lingkaran luar $O = 0$ dan menurut teorema di atas $H = z_1 + z_2 + z_3 = 0 = O$. Jika $O = H$, garis tinggi dari A melalui O , sehingga O pada sumbu BC dan garis tinggi sekaligus; akibatnya $AB = AC$. Dengan cara yang sama $BA = BC$. ■

💡 **STRATEGI** Pilih titik asal dengan cerdas: O untuk soal yang melibatkan lingkaran luar dan H, G untuk soal jumlah kuadrat jarak. Bilangan kompleks paling efektif jika soal memuat rotasi, segitiga sama sisi, atau titik-titik pada satu lingkaran.

14.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 14.3** Buktikan bahwa pada setiap jajaran genjang, jumlah kuadrat kedua diagonal sama dengan jumlah kuadrat keempat sisinya.

Pilihan alat. Secara sintetis, kita bisa memakai aturan kosinus dua kali (sudut-sudut jajaran genjang saling berpelurus, sehingga suku kosinusnya saling menghapus). Dengan vektor, jajaran genjang ditentukan oleh dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dari satu titik sudut, dan kedua diagonal adalah $\vec{u} + \vec{v}$ dan $\vec{u} - \vec{v}$. Pilihan vektor membuat bukti hampir otomatis.

Solusi. Misalkan jajaran genjang $ABCD$ dengan $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ dan $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Maka $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ dan $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$.

$$AC^2 + BD^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

karena suku $\pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ saling menghapus dan sisi-sisi berhadapan sama panjang. ■

Refleksi. Hukum jajaran genjang ini setara dengan rumus garis berat Apollonius (Bab 11): diagonal jajaran genjang adalah dua kali garis berat segitiga. Satu identitas aljabar, $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$, menjelaskan dua teorema geometri. Inilah kekuatan vektor: ia memperlihatkan bahwa fakta-fakta yang tampak berbeda sebenarnya satu.

14.6 Wawasan sejarah dan konteks

René Descartes menerbitkan *La Géométrie* (1637) sebagai lampiran *Discours de la méthode*, menyatukan aljabar dan geometri melalui koordinat; Pierre de Fermat mengembangkan gagasan serupa secara independen. Penafsiran geometris bilangan kompleks sebagai titik di bidang diajukan Caspar Wessel (1799) dan Jean-Robert Argand (1806), lalu dipopulerkan Gauss. Aljabar vektor modern dibentuk pada akhir abad ke-19 oleh Josiah Willard Gibbs dan Oliver Heaviside.

Di geometri olimpiade, metode “bashing” (koordinat, kompleks, atau barisentrik) diterima penuh oleh penilai asalkan perhitungannya lengkap dan benar. Strategi yang bijak adalah menguasai metode sintetis *dan* setidaknya satu metode perhitungan sebagai cadangan.

Inti Bab

Pilih titik asal dengan cerdas: O untuk soal lingkaran luar dan titik tinggi, G untuk soal jumlah kuadrat jarak, pusat simetri bila ada.

Rumus tali sepatu untuk luas, hasil kali titik untuk ketegaklurusan, dan bilangan kompleks untuk rotasi. Kriteria $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ adalah cara tercepat membuktikan segitiga sama sisi.

Latihan

- 14.1 ★** Hitung luas segi empat dengan titik sudut $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 3)$, $(1, 4)$.
- 14.2 ★** Buktikan titik-titik tengah sisi sembarang segi empat membentuk jajaran genjang (teorema Varignon).
- 14.3 ★** Buktikan untuk persegi panjang $ABCD$ dan sembarang titik P : $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.
- 14.4 ★★** Buktikan $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ lalu tunjukkan $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$ pada setiap segitiga.
- 14.5 ★★** Diberikan segitiga ABC . Tentukan titik P yang meminimumkan $PA^2 + PB^2 + PC^2$.
- 14.6 ★★★** Pada lingkaran satuan diberikan titik a, b, c, d . Buktikan bahwa titik tinggi keempat segitiga bcd , acd , abd , abc membentuk segi empat yang kongruen dengan $abcd$.

Titik–Titik Pusat Segitiga

Setiap segitiga memiliki empat pusat utama, dan hubungan antar–pusat itulah yang sering diuji. Pusat lingkaran luar O , pusat lingkaran dalam I , titik berat G , dan titik tinggi H masing-masing sederhana; yang menarik adalah jarak dan sudut di antara mereka.

Tiga fakta dari bab ini muncul berulang kali di soal IMO: lema pusat dalam–pusat singgung luar ($MB = MI = MC$), pantulan titik tinggi terhadap sisi yang jatuh pada lingkaran luar, dan rumus Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$. IMO 2024 Soal 4, misalnya, memakai langsung kesamaan $PB = PC = PI$.

PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) membuktikan keberadaan O, I, G, H ; (2) memakai garis Euler dan lingkaran sembilan titik; (3) memakai lema pusat dalam–pusat singgung luar; (4) memakai sifat pantulan titik tinggi; (5) membuktikan rumus Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

15.1 Empat titik pusat

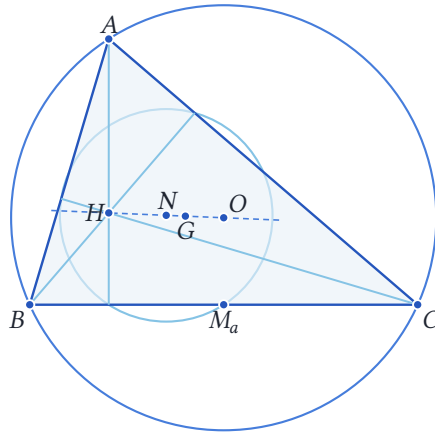
★ TEOREMA 15.1 Pada setiap segitiga ABC : (1) ketiga sumbu sisi bertemu di O , pusat lingkaran luar; (2) ketiga garis bagi dalam bertemu di I , pusat lingkaran dalam; (3) ketiga garis berat bertemu di G , yang membagi setiap garis berat dengan perbandingan $2 : 1$; (4) ketiga garis tinggi bertemu di H , titik tinggi.

Bukti. (1) Titik potong dua sumbu berjarak sama ke ketiga titik sudut, jadi terletak pada sumbu ketiga. (2) Sama, dengan jarak ke sisi. (3) Ceva dengan semua perbandingan 1,

atau $G = \frac{A+B+C}{3}$. (4) Garis tinggi segitiga ABC adalah sumbu sisi segitiga yang dibentuk oleh garis-garis melalui A, B, C yang sejajar sisi di hadapannya; gunakan (1). $\square$

15.2 Garis Euler dan lingkaran sembilan titik

Dari Bab 13 dan Bab 14: O, G, H segaris dengan $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, dan titik tengah N dari OH adalah pusat lingkaran sembilan titik yang berjari-jari $\frac{R}{2}$.



Gambar 15.1. Garis Euler (putus-putus) memuat O, G, N, H ; lingkaran sembilan titik (biru muda) melalui titik tengah sisi dan kaki garis tinggi.

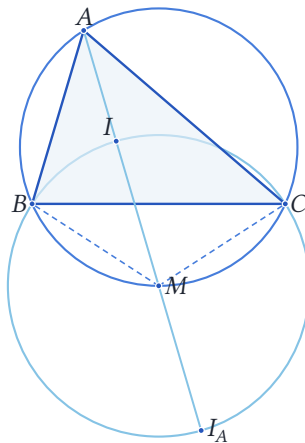
15.3 Pantulan titik tinggi

★ **TEOREMA 15.2** *Pantulan H terhadap garis BC terletak pada lingkaran luar. Pantulan H terhadap titik tengah M_a dari BC adalah titik A' yang berseberangan diametral dengan A . Akibatnya $AH = 2OM_a$.*

Bukti. Untuk segitiga lancip, misalkan AH memotong lingkaran luar lagi di D . Maka $\angle BDA = \angle BCA = C$, sedangkan $\angle BHD = C$ karena $\angle HBC = 90^\circ - C$. Jadi segitiga BHD sama kaki dengan BC tegak lurus HD , sehingga D pantulan H terhadap BC . Untuk bagian kedua, dengan O sebagai titik asal, $H = A + B + C$ dan $A' = -A$; titik tengah HA' adalah $\frac{B+C}{2} = M_a$. Terakhir, $\overrightarrow{AH} = B + C = 2\overrightarrow{OM_a}$. $\square$

15.4 Lema pusat dalam–pusat singgung luar

★ **TEOREMA 15.3** (*Lema incenter–excenter*) Misalkan garis AI memotong lingkaran luar lagi di M (titik tengah busur BC yang tidak memuat A), dan I_A pusat lingkaran singgung luar di hadapan A . Maka M adalah pusat lingkaran yang melalui B, I, C , dan I_A ; yaitu $MB = MI = MC = MI_A$.



Gambar 15.2. M berjarak sama ke B, C, I , dan I_A .

Bukti. $\angle MBC = \angle MAC = \frac{A}{2}$ (sudut keliling). Maka $\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$. Di sisi lain $\angle MIB$ adalah sudut luar segitiga ABI , jadi $\angle MIB = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$. Segitiga MBI sama kaki: $MB = MI$. Demikian pula $MC = MI$. Karena $BI \perp BI_A$ (garis bagi dalam dan luar), $\angle IBI_A = 90^\circ$, sehingga B terletak pada lingkaran berdiameter II_A . Pusat lingkaran itu terletak pada garis AI dan berjarak MB dari B dan I ; pusat itu adalah M , sehingga $MI_A = MI$. $\square$

15.5 Rumus Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$

★ **TEOREMA 15.4** (*Euler*) $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Akibatnya $R \geq 2r$, dengan kesamaan jika dan hanya jika segitiga sama sisi.

Bukti. Kuasa I terhadap lingkaran luar adalah $OI^2 - R^2 = -IA \cdot IM$. Dari segitiga siku-siku yang dibentuk I dan titik singgung pada AB , $IA = \frac{r}{\sin(A/2)}$. Dari lema di atas

dan aturan sinus pada segitiga ABM , $IM = MB = 2R \sin \frac{A}{2}$. Jadi $IA \cdot IM = 2Rr$, dan $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Karena $OI^2 \geq 0$, $R \geq 2r$. $\square$

 **CONTOH 15.1** Hitung OI^2 untuk segitiga 13-14-15.

Solusi. Dari Bab 11, $R = \frac{65}{8}$ dan $r = 4$. Maka $OI^2 = R(R - 2r) = \frac{65}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{65}{64}$. $\blacksquare$

 **STRATEGI** Titik tengah busur M adalah salah satu titik paling berguna di geometri olimpiade. Setiap kali pusat lingkaran dalam muncul, tarik garis AI sampai lingkaran luar dan periksa apakah lema pusat dalam–pusat singgung luar menyederhanakan soal.

15.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 15.2** Pada segitiga lancip ABC dengan $\angle A = 60^\circ$, buktikan B, C, O, H , dan I terletak pada satu lingkaran.

Coretan pertama: hitung tiga sudut. Semua titik “melihat” ruas BC . Jika sudut-sudut $\angle BOC$, $\angle BHC$, $\angle BIC$ sama besar, dan ketiga titik berada di pihak yang sama terhadap BC , maka ketiganya terletak pada satu busur yang sama melalui B dan C . Maka tugasnya adalah menghitung ketiga sudut dalam A .

Menghitung. Sudut pusat: $\angle BOC = 2A$. Pusat lingkaran dalam: $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ (Soal 15.2). Titik tinggi: pada segi empat $AFHE$ (dengan E, F kaki garis tinggi dari B, C), sudut di E dan F siku-siku, jadi $\angle FHE = 180^\circ - A$, dan $\angle BHC = \angle FHE$ (bertolak belakang). Untuk $A = 60^\circ$ ketiganya 120° !

Solusi. Untuk segitiga lancip, O, H, I terletak di dalam segitiga, jadi di pihak yang sama dengan A terhadap BC . Kita punya $\angle BOC = 2A$, $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$, dan $\angle BHC = 180^\circ - A$. Untuk $A = 60^\circ$, ketiganya bernilai 120° . Titik-titik di pihak yang sama terhadap BC yang melihat BC dengan sudut yang sama terletak pada satu busur lingkaran melalui B dan C . Jadi B, C, O, H, I konsiklis. $\blacksquare$

Refleksi. Tiga rumus sudut ini ($2A, 180^\circ - A, 90^\circ + \frac{A}{2}$) layak dihafal. Soal ini juga menunjukkan kebalikan yang menarik: kelima titik konsiklis *hanya* jika $A = 60^\circ$, karena persamaan $2A = 180^\circ - A$ hanya berlaku di $A = 60^\circ$. Soal olimpiade sering tersembunyi di balik syarat sudut “istimewa” seperti ini.

15.7 Wawasan sejarah dan konteks

Leonhard Euler membuktikan pada 1765 bahwa O , G , dan H segaris; dalam makalah yang sama ia menghitung jarak-jarak antartitik pusat, termasuk rumus $OI^2 = R^2 - 2Rr$ yang sebenarnya sudah dipublikasikan William Chapple pada 1746. Lingkaran sembilan titik dipelajari Charles Brianchon, Jean-Victor Poncelet, dan Karl Wilhelm Feuerbach, yang pada 1822 membuktikan fakta menakjubkan: lingkaran sembilan titik menyinggung lingkaran dalam dan ketiga lingkaran singgung luar.

Lema pusat dalam–pusat singgung luar tidak memiliki nama penemu yang pasti, tetapi dalam komunitas olimpiade modern ia dikenal sebagai salah satu “lema paling berguna” dalam geometri segitiga, dan muncul secara tersirat dalam banyak soal IMO, termasuk IMO 2024 Soal 4.

Inti Bab

Garis Euler dan lingkaran sembilan titik mengikat O , G , H . Lema pusat dalam–pusat singgung luar mengikat I dengan lingkaran luar melalui titik tengah busur.

Pantulan H terhadap sisi dan terhadap titik tengah sisi jatuh pada lingkaran luar; akibatnya $AH = 2OM_a$. Rumus Euler memberi $R \geq 2r$ sebagai bonus. Hafalkan konfigurasi ini sampai Anda dapat menggambarinya tanpa berpikir.

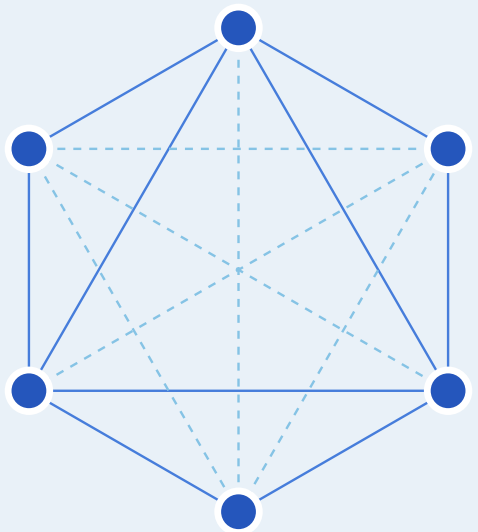
Latihan

- 15.1 ★ Hitung R , r , dan OI untuk segitiga 5-12-13.
- 15.2 ★ Buktikan $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$.
- 15.3 ★★ Buktikan $AH = 2R|\cos A|$.
- 15.4 ★★ Buktikan $\angle BAH = \angle OAC$.
- 15.5 ★★ Buktikan jari-jari lingkaran sembilan titik adalah $\frac{R}{2}$ dengan menunjukkan bahwa lingkaran itu adalah lingkaran luar segitiga titik tengah.
- 15.6 ★★★ Buktikan I adalah titik tinggi segitiga $I_AI_BI_C$ yang dibentuk oleh tiga pusat lingkaran singgung luar, dan lingkaran luar ABC adalah lingkaran sembilan titik segitiga $I_AI_BI_C$.

BAGIAN IV

Kombinatorika

Sarang merpati, invarian dan monovarian, graf, penghitungan ganda, dan strategi permainan. Kombinatorika paling sedikit memerlukan hafalan dan paling banyak memerlukan kreativitas.





Prinsip Sarang Merpati

Jika sebelas merpati masuk ke sepuluh sarang, satu sarang pasti berisi dua merpati. Pernyataan sederhana ini membuktikan hasil yang mengejutkan: ada pangkat 3 yang berakhir dengan 001, setiap barisan $n^2 + 1$ bilangan memuat subbarisan monoton panjang, dan setiap bilangan asli memiliki kelipatan yang hanya terdiri atas angka 0 dan 1.

Seninya bukan menerapkan prinsip, melainkan merancang sarang. IMO 2021 Soal 1 adalah sarang merpati murni dengan tiga merpati dan dua sarang; IMO 2025 Soal 6 memakai Erdős–Szekeres untuk batas bawahnya.

🕒 PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai prinsip sarang merpati dasar dan umum; (2) merancang “sarang” yang tepat, misalnya kelas sisa, bagian ganjil, atau jumlah awalan; (3) memakainya pada barisan, geometri, dan titik kisi.

16.1 Pernyataan

★ **TEOREMA 16.1** (*Prinsip sarang merpati*) *Jika n benda dimasukkan ke dalam k kotak, maka ada kotak yang berisi paling sedikit $\lceil n/k \rceil$ benda. Khususnya, jika $n > k$, ada kotak berisi paling sedikit dua benda.*

Bukti. Jika setiap kotak berisi paling banyak $\lceil n/k \rceil - 1 < \frac{n}{k}$ benda, jumlahnya kurang dari n . □

 **STRATEGI** Kesulitannya bukan menerapkan prinsip, melainkan *memilih kotak*. Kotak yang baik membuat “dua benda dalam satu kotak” langsung berarti “kesimpulan yang diminta benar”. Hitung dulu: berapa benda, berapa kotak yang diperlukan.

16.2 Kotak dari bilangan

 **CONTOH 16.1** Dari $\{1, 2, \dots, 2n\}$ dipilih $n + 1$ bilangan. Buktikan (a) ada dua bilangan berurutan; (b) ada dua bilangan yang salah satunya membagi yang lain.

Solusi. (a) Kotaknya $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n - 1, 2n\}$: n kotak untuk $n + 1$ bilangan.

(b) Tulis setiap bilangan sebagai $2^k m$ dengan m ganjil. Bagian ganjil m termasuk dalam $\{1, 3, \dots, 2n - 1\}$, yang hanya memiliki n nilai. Jadi ada dua bilangan dengan bagian ganjil sama, $2^k m$ dan $2^l m$ dengan $k < l$, dan yang pertama membagi yang kedua. ■

 **CONTOH 16.2** Buktikan bahwa dari sembarang n bilangan bulat $a_1, \dots, a_n$ dapat dipilih beberapa suku berurutan (paling sedikit satu) yang jumlahnya habis dibagi n .

Solusi. Pandang jumlah awalan $S_0 = 0, S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n$. Ada $n + 1$ jumlah dan hanya n sisa modulo n , jadi $S_i \equiv S_j$ untuk suatu $i < j$. Maka $a_{i+1} + \dots + a_j = S_j - S_i$ habis dibagi n . ■

16.3 Barisan: teorema Erdős–Szekeres

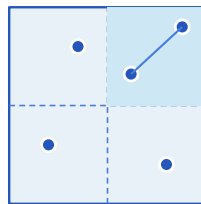
 **TEOREMA 16.2** (Erdős–Szekeres) Setiap barisan $n^2 + 1$ bilangan real berbeda memuat subbarisan naik sepanjang $n + 1$ atau subbarisan turun sepanjang $n + 1$.

Bukti. Untuk setiap suku x_i , misalkan ℓ_i panjang subbarisan naik terpanjang yang berawal di x_i . Jika semua $\ell_i \leq n$, maka $n^2 + 1$ suku terbagi ke n kotak menurut nilai ℓ_i , sehingga ada $n + 1$ suku $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+1}}$ ($i_1 < \dots < i_{n+1}$) dengan ℓ sama. Jika $x_{i_1} < x_{i_2}$, maka x_{i_1} dapat ditambahkan di depan subbarisan naik dari x_{i_2} , sehingga $\ell_{i_1} > \ell_{i_2}$, kontradiksi. Jadi $x_{i_1} > x_{i_2} > \dots > x_{i_{n+1}}$, sebuah subbarisan turun sepanjang $n + 1$. □

16.4 Kotak geometris

CONTOH 16.3 Lima titik diletakkan di dalam persegi bersisi 1. Buktikan ada dua titik yang jaraknya paling banyak $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solusi. Bagi persegi menjadi empat persegi kecil bersisi $\frac{1}{2}$. Dua titik berada di persegi kecil yang sama, dan jaraknya paling banyak diagonal persegi kecil, yaitu $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■



sisi 1

Gambar 16.1. Persegi satuan dibagi menjadi empat “sarang”; lima titik memaksa dua titik berbagi satu persegi kecil.

CONTOH 16.4 Diberikan lima titik latris (koordinat bulat) di bidang. Buktikan ada dua titik yang titik tengahnya juga titik latris.

Solusi. Kelompokkan titik menurut paritas koordinatnya: (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, genap), (ganjil, ganjil). Ada empat kelas untuk lima titik, jadi dua titik sekelas. Koordinat titik tengahnya adalah $\frac{x_1+x_2}{2}$ dan $\frac{y_1+y_2}{2}$, keduanya bulat. ■

16.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi

CONTOH 16.5 Dalam sebuah pesta ada $n \geq 2$ orang. Buktikan ada dua orang yang memiliki banyak kenalan yang sama di pesta itu (perkenalan bersifat timbal balik).

Coretan pertama. Banyak kenalan seseorang adalah bilangan dari 0 sampai $n - 1$: ada n nilai untuk n orang. Sarang merpati tampaknya gagal, karena banyak sarang sama dengan banyak merpati. Di sinilah peserta yang berpengalaman tidak menyerah, tetapi bertanya: *apakah semua sarang benar-benar dapat terisi bersamaan?*

Pengamatan kunci. Nilai 0 dan $n - 1$ tidak mungkin muncul bersamaan: orang yang mengenal semua orang ($n - 1$ kenalan) juga mengenal orang yang “tidak mengenal siapa pun”, kontradiksi.

Solusi. Banyak kenalan setiap orang terletak di $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Jika ada orang dengan 0 kenalan, tidak ada orang dengan $n - 1$ kenalan (orang itu akan mengenal orang pertama). Jadi nilai-nilai yang muncul terletak di $\{0, \dots, n - 2\}$ atau di $\{1, \dots, n - 1\}$; dalam kedua kasus hanya ada $n - 1$ nilai yang mungkin untuk n orang. Menurut prinsip sarang merpati, dua orang memiliki banyak kenalan yang sama. ■

Refleksi. Kadang sarang merpati “pas-pasan” (n merpati, n sarang), dan kuncinya adalah membuktikan bahwa dua sarang tertentu tidak dapat terisi bersamaan. Dalam bahasa graf (Bab 18): setiap graf dengan paling sedikit dua titik memiliki dua titik berderajat sama.

16.6 Wawasan sejarah dan konteks

Peter Gustav Lejeune Dirichlet memakai prinsip ini secara eksplisit pada 1834 dengan nama *Schubfachprinzip* (prinsip laci), antara lain untuk membuktikan bahwa setiap bilangan irasional dapat didekati oleh pecahan $\frac{p}{q}$ dengan galat kurang dari $\frac{1}{q^2}$. Teorema Erdős–Szekeres (1935) adalah salah satu hasil pertama teori Ramsey dan lahir dari pertanyaan Esther Klein tentang lima titik di bidang yang selalu memuat segi empat konveks; Klein dan Szekeres kemudian menikah, sehingga Erdős menyebut soal itu “happy ending problem”.

Prinsip yang tampak sepele ini adalah pintu masuk ke kombinatorika ekstremal dan teori Ramsey, bidang yang mempelajari keteraturan yang tak terhindarkan dalam struktur yang cukup besar.

Inti Bab

Prinsip sarang merpati hanya berguna jika sarangnya dipilih sehingga “dua benda dalam satu sarang” langsung berarti kesimpulan yang diminta. Sarang yang umum: kelas sisa, bagian ganjil, jumlah awalan, petak geometris, dan kelas paritas koordinat.

Selalu hitung dulu: berapa benda dan berapa sarang yang dibutuhkan. Angka dalam soal biasanya adalah petunjuk tentang sarang yang tepat.

Latihan

- 16.1** ★ Buktikan bahwa di antara 7 bilangan bulat selalu ada dua yang jumlah atau selisihnya habis dibagi 10.
- 16.2** ★ Buktikan bahwa di antara 5 bilangan bulat selalu ada 3 yang jumlahnya habis dibagi 3.
- 16.3** ★★ Buktikan setiap himpunan 10 bilangan dua digit memuat dua himpunan bagian tak kosong yang saling lepas dan jumlah unsurnya sama. (IMO 1972)
- 16.4** ★★ Buktikan ada pangkat 3 yang tiga digit terakhirnya 001.
- 16.5** ★★ Buktikan setiap bilangan asli n memiliki kelipatan yang hanya terdiri atas angka 0 dan 1.
- 16.6** ★★ Sebanyak 51 titik diletakkan di persegi satuan. Buktikan ada 3 titik di dalam lingkaran berjari-jari $\frac{1}{7}$.
- 16.7** ★★★ Seorang pecatur berlatih paling sedikit satu partai setiap hari selama 11 minggu, tetapi paling banyak 12 partai dalam satu minggu. Buktikan ada beberapa hari berurutan yang total partainya tepat 21.



Invarian dan Monovarian

Dalam soal proses, cari yang tidak berubah. Ketika sebuah operasi diulang-ulang dan kita ditanya apakah suatu keadaan dapat dicapai, jawaban hampir selalu terletak pada besaran yang tetap (invarian) atau besaran yang selalu bergerak ke satu arah (monovarian).

Dua soal IMO 2026 adalah contoh sempurna: Soal 1 diselesaikan oleh invarian FPB eksponen, dan Soal 4 oleh invarian “tidak ada sudut kelipatan θ ”. Keduanya dapat dikerjakan penuh dengan materi bab ini. Bab ini melatih naluri untuk mencari besaran tersebut dengan cepat.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menemukan besaran yang tidak berubah oleh suatu operasi; (2) memakai paritas dan pewarnaan sebagai invarian; (3) memakai besaran yang berubah monoton untuk membuktikan bahwa proses berhenti; (4) menulis argumen invarian secara lengkap.

17.1 Invarian

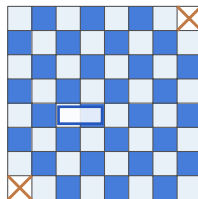
DEFINISI 17.1 Dalam soal proses (operasi yang diulang), **invarian** adalah besaran yang nilainya tidak berubah oleh setiap operasi. Jika nilai invarian di keadaan awal berbeda dengan di keadaan target, target tidak dapat dicapai.

CONTOH 17.1 Bilangan $1, 2, \dots, 2026$ ditulis di papan. Setiap langkah, dua bilangan a, b dihapus dan diganti dengan $|a - b|$. Setelah 2025 langkah tersisa satu bilangan. Buktikan bilangan itu ganjil.

Solusi. Karena $|a - b| \equiv a + b \pmod{2}$, paritas jumlah semua bilangan di papan invarian. Mula-mula jumlahnya $\frac{2026 \cdot 2027}{2} = 2\,053\,351$, ganjil. Jadi bilangan terakhir ganjil. ■

CONTOH 17.2 Dua petak di sudut berhadapan papan catur 8×8 dibuang. Dapatkah 62 petak sisanya ditutup oleh 31 domino 1×2 ?

Solusi. Tidak. Setiap domino menutup satu petak hitam dan satu petak putih. Dua sudut berhadapan berwarna sama, sehingga tersisa 32 petak dari satu warna dan 30 dari warna lain. ■



Gambar 17.1. Papan catur tanpa dua sudut berhadapan (keduanya gelap): tersisa 30 petak gelap dan 32 petak terang, sedangkan setiap domino menutup satu petak dari setiap warna.

CONTOH 17.3 Di sebuah pulau ada 13 bunglon merah, 15 hijau, dan 17 biru. Setiap kali dua bunglon berbeda warna bertemu, keduanya berubah menjadi warna ketiga. Mungkinkah suatu saat semua bunglon berwarna sama?

Solusi. Misalkan banyaknya (m, h, b) . Setiap pertemuan mengubah dua banyaknya sebesar -1 dan yang ketiga sebesar $+2$, sehingga setiap selisih berubah sebesar 0 atau ± 3 : selisih modulo 3 invarian. Mula-mula $h - m \equiv 2, b - h \equiv 2, b - m \equiv 1 \pmod{3}$, tidak ada yang nol. Jika semua berwarna sama, dua banyaknya nol dan selisihnya 0 . Jadi tidak mungkin. ■

CATATAN Soal IMO 2026 nomor 1 (Bab 42) adalah contoh modern: invariannya adalah FPB eksponen-eksponen prima, yang dipertahankan oleh operasi “ganti dengan FPB dan KPK/FPB”.

17.2 Monovarian

 **DEFINISI 17.2 Monovarian** adalah besaran yang berubah ke satu arah saja (naik atau turun) pada setiap operasi. Jika besaran itu bilangan bulat yang terbatas, proses harus berhenti.

 **CONTOH 17.4** Bilangan real ditulis dalam tabel $m \times n$. Dalam satu langkah, kita boleh mengganti tanda semua bilangan pada satu baris atau satu kolom. Buktikan kita dapat mencapai keadaan di mana jumlah setiap baris dan setiap kolom tak negatif.

Solusi. Selama ada baris atau kolom dengan jumlah negatif, balik tandanya. Jumlah seluruh tabel naik tegas (sebesar dua kali nilai mutlak jumlah baris itu). Karena hanya ada paling banyak 2^{m+n} pola tanda, jumlah seluruh tabel hanya dapat mengambil berhingga banyak nilai; jadi proses berhenti, dan saat berhenti semua jumlah baris dan kolom tak negatif. ■

 **CONTOH 17.5** Setiap anggota sebuah parlemen memiliki paling banyak tiga musuh (permusuhan bersifat timbal balik). Buktikan anggota dapat dibagi ke dua kamar sehingga setiap anggota memiliki paling banyak satu musuh di kamarnya sendiri.

Solusi. Mulai dari pembagian sembarang. Misalkan E banyak pasangan musuh yang berada dalam kamar yang sama. Jika seorang anggota memiliki paling sedikit dua musuh di kamarnya, maka ia memiliki paling banyak satu musuh di kamar lain; memin-dahkannya mengurangi E paling sedikit 1. Karena E bilangan bulat tak negatif, proses berhenti, dan saat berhenti syarat soal terpenuhi. ■

 **STRATEGI** Untuk soal “buktikan bahwa proses berhenti” atau “buktikan konfigurasi baik ada”, carilah besaran bulat yang turun (atau naik) setiap kali konfigurasi belum baik. Kandidat umum: banyak pasangan “buruk”, jumlah kuadrat, jumlah posisi, atau jumlah semua bilangan.

17.3 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 17.6** Pada papan catur 8×8 biasa (32 petak hitam), satu langkah membalik warna semua petak pada satu baris atau satu kolom. Dapatkah dicapai keadaan dengan tepat satu petak hitam?

Coretan pertama. Coba beberapa langkah: membalik baris pertama mengubah 4 hitam menjadi putih dan 4 putih menjadi hitam, jadi banyak petak hitam tetap 32. Membalik baris itu lagi mengembalikan semuanya. Tampaknya sulit mengurangi banyak petak hitam. Tetapi kombinasi baris dan kolom bisa lebih rumit; percobaan tidak cukup.

Mencari invarian. Apa yang terjadi pada banyak petak hitam N dalam satu langkah? Jika baris (atau kolom) yang dibalik memuat k petak hitam, setelah dibalik ia memuat $8 - k$ petak hitam. Jadi N berubah sebesar $(8 - k) - k = 8 - 2k$, bilangan genap.

Solusi. Satu langkah mengubah banyak petak hitam sebesar $8 - 2k$ untuk suatu k , yang selalu genap. Jadi paritas banyak petak hitam invarian. Mula-mula ada 32 petak hitam (genap), sedangkan keadaan target memiliki 1 (ganjil). Jadi target tidak dapat dicapai. ■

Refleksi. Invarian paritas adalah invarian yang paling sering berhasil, dan langkah pertama mencarinya adalah bertanya: “berapa perubahan besaran yang wajar dalam satu langkah?” Jika perubahannya selalu kelipatan suatu bilangan m , sisa modulo m adalah invarian. Latihan: tunjukkan dengan cara yang sama bahwa pada papan 3×3 semua putih, tidak dapat dicapai keadaan dengan tepat satu petak hitam. Perhatikan bahwa untuk papan berukuran ganjil, perubahan $3 - 2k$ ganjil, jadi paritas *tidak* invarian; di sana diperlukan invarian yang lebih halus.

17.4 Wawasan sejarah dan konteks

Salah satu kegemaran matematika populer abad ke-19 adalah “teka-teki 15” (1880): kotak berisi 15 ubin bernomor yang dapat digeser. Pada 1879 William Johnson dan William Story membuktikan dengan invarian paritas permutasi bahwa tepat setengah dari semua susunan tidak dapat dicapai, sehingga hadiah yang ditawarkan untuk menukar dua ubin terakhir tidak pernah dapat diklaim.

Dalam matematika modern, invarian adalah alat utama untuk membedakan objek: invarian topologis membedakan permukaan, invarian simpul membedakan simpul, dan dalam teori permainan dan komputasi, monovarian (fungsi potensial) membuktikan bahwa algoritma berhenti.

Inti Bab

Invarian membuktikan *ketidakmungkinan*: jika nilai invarian di awal berbeda dengan di target, target tidak tercapai. Kandidat invarian: paritas jumlah, pewarnaan, selisih modulo, hasil kali tergeser.

Monovarian membuktikan *keberhentian* dan *keberadaan*: besaran bulat yang turun tegas tidak dapat turun selamanya. Kandidat monovarian: banyak pasangan buruk, jumlah kuadrat, jumlah seluruh tabel.

Latihan

- 17.1 ★** Bilangan $(3, 4, 5)$ diubah dengan operasi: pilih dua bilangan a, b dan ganti dengan $0,6a - 0,8b$ dan $0,8a + 0,6b$. Dapatkah dicapai $(4, 6, 1)$?
- 17.2 ★** Bilangan $1, 2, \dots, 10$ ditulis di papan. Setiap langkah, a dan b dihapus dan diganti $a + b + ab$. Tentukan bilangan terakhir.
- 17.3 ★★** Dapatkah papan 10×10 ditutup oleh 25 ubin 1×4 ?
- 17.4 ★★** Pada papan tertulis bilangan $1, 2, \dots, n$. Setiap langkah, dua bilangan diganti dengan selisihnya. Untuk n berapa saja bilangan terakhir dapat bernilai 0?
- 17.5 ★★** Di setiap titik sudut segi- n ditulis bilangan bulat. Setiap langkah, pilih dua titik bersebelahan dan tambahkan 1 pada keduanya. Kapan semua bilangan dapat dibuat sama, jika mula-mula bilangannya $1, 0, 0, \dots, 0$ dan n genap?
- 17.6 ★★★** Di titik-titik sudut segi lima ditulis bilangan bulat dengan jumlah positif. Jika tiga titik berurutan bertuliskan x, y, z dengan $y < 0$, operasi mengganti ketiganya dengan $x + y, -y, z + y$. Buktikan proses selalu berhenti. (IMO 1986)



Teori Graf

Graf adalah bahasa hubungan. Orang yang saling kenal, kota yang dihubungkan jalan, tim yang saling bertanding, warna yang berbagi pasangan: semuanya adalah titik dan sisi. Begitu soal diterjemahkan ke graf, puluhan teorema siap dipakai.

IMO 2020 Soal 3 adalah contoh paling jelas: soal tentang kerikil dan warna menjadi soal sirkuit Euler pada multigraf beraturan. IMO 2019 Soal 3 adalah soal graf yang disamakan sebagai jejaring sosial. Bab ini memberi kosakata dan teorema dasar untuk menerjemahkan soal dengan lancar.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) memakai bahasa graf untuk memodelkan soal; (2) memakai lema jabat tangan; (3) membuktikan hasil tipe Ramsey dan teorema Mantel; (4) memakai sifat pohon dan sirkuit Euler; (5) mengenal teorema Hall.

18.1 Definisi dan lema jabat tangan

DEFINISI 18.1 Graf $G = (V, E)$ terdiri atas himpunan titik V dan himpunan sisi E , yaitu pasangan tak berurut titik-titik berbeda. **Derajat** $d(v)$ adalah banyak sisi yang memuat v . Graf **terhubung** jika setiap dua titik dihubungkan oleh lintasan.

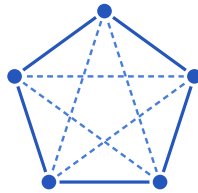
★ **TEOREMA 18.2** (*Lema jabat tangan*) $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Akibatnya banyak titik berderajat ganjil selalu genap.

Bukti. Setiap sisi dihitung tepat dua kali di ruas kiri, sekali untuk setiap ujungnya. □

18.2 Ramsey dan Mantel

🔪 **CONTOH 18.1** Buktikan bahwa di antara 6 orang selalu ada 3 orang yang saling kenal atau 3 orang yang saling tidak kenal. Tunjukkan bahwa 5 orang tidak cukup.

Solusi. Ambil seorang v . Di antara 5 orang lainnya, menurut sarang merpati, paling sedikit 3 dikenal v atau paling sedikit 3 tidak dikenal v ; misalkan kasus pertama dengan orang x, y, z . Jika dua di antara x, y, z saling kenal, keduanya bersama v membentuk tiga orang saling kenal. Jika tidak, x, y, z saling tidak kenal. Untuk 5 orang, susun mereka dalam lingkaran dengan setiap orang hanya mengenal dua tetangganya (segi lima): tidak ada segitiga dalam graf kenal maupun dalam komplemennya (juga segi lima). ■



Gambar 18.1. Lima orang tanpa tiga orang yang saling kenal atau saling tidak kenal: garis tegas = kenal (segi lima), garis putus-putus = tidak kenal (pentagram).

★ **TEOREMA 18.3** (*Mantel*) Graf dengan n titik tanpa segitiga memiliki paling banyak $\lfloor n^2/4 \rfloor$ sisi.

Bukti. Untuk sisi uv , tetangga u dan tetangga v tidak beririsan (irisan akan membentuk segitiga), jadi $d(u) + d(v) \leq n$. Jumlahkan atas semua sisi: $\sum_{uv \in E} (d(u) + d(v)) = \sum_v d(v)^2$, karena setiap titik v muncul $d(v)$ kali. Dengan Cauchy–Schwarz,

$$n|E| \geq \sum_v d(v)^2 \geq \frac{(\sum_v d(v))^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n},$$

sehingga $|E| \leq \frac{n^2}{4}$. Batas ini dicapai graf bipartit lengkap dengan bagian berukuran $\lfloor n/2 \rfloor$ dan $\lceil n/2 \rceil$. $\square$

18.3 Pohon

■ **DEFINISI 18.4** Pohon adalah graf terhubung tanpa siklus.

★ **TEOREMA 18.5** Untuk graf G dengan n titik, pernyataan berikut setara: (i) G pohon; (ii) G terhubung dan memiliki $n - 1$ sisi; (iii) G tanpa siklus dan memiliki $n - 1$ sisi; (iv) setiap dua titik dihubungkan oleh tepat satu lintasan.

Sketsa bukti (i) $\Rightarrow$ (ii). Pohon dengan $n \geq 2$ titik memiliki daun (titik berderajat 1): ujung lintasan terpanjang adalah daun. Hapus daun itu beserta sisinya; diperoleh pohon dengan $n - 1$ titik. Induksi memberi $n - 1$ sisi. $\square$

18.4 Sirkuit Euler

★ **TEOREMA 18.6 (Euler)** Graf terhubung memiliki sirkuit yang melalui setiap sisi tepat sekali jika dan hanya jika setiap titik berderajat genap. Graf terhubung memiliki lintasan seperti itu (tidak harus tertutup) jika dan hanya jika banyak titik berderajat ganjil adalah 0 atau 2.

Sketsa bukti. Syarat perlu: setiap kali sirkuit melewati sebuah titik, ia memakai dua sisi. Syarat cukup: mulai dari sembarang titik dan berjalan tanpa mengulang sisi; karena semua derajat genap, perjalanan hanya dapat berhenti di titik awal. Jika masih ada sisi tersisa, sisipkan sirkuit tambahan dari titik pada sirkuit yang sudah ada (keterhubungan menjamin titik itu ada), lalu ulangi. $\square$

18.5 Teorema Hall

★ **TEOREMA 18.7** (Hall, tanpa bukti) Pada graf bipartit dengan bagian X dan Y , ada pemasangan yang memasangkan setiap titik X dengan titik Y yang berbeda-beda jika dan hanya jika untuk setiap $S \subseteq X$, banyak tetangga S paling sedikit $|S|$.

💡 **STRATEGI** Ketika soal kombinatorika menyebut orang yang saling kenal, kota dan jalan, pertandingan, atau pasangan yang “cocok”, terjemahkan ke graf. Lalu tanyakan: apa arti derajat? Apakah graf bipartit? Apakah ada siklus?

18.6 Studi kasus: dari coretan ke solusi

🔍 **CONTOH 18.2** Buktikan bahwa setiap graf berhingga yang semua titiknya berderajat paling sedikit 2 memuat siklus.

Coretan pertama: berjalan. Mulai dari sembarang titik dan berjalan tanpa kembali lewat sisi yang baru dilalui. Karena setiap titik berderajat paling sedikit 2, kita selalu dapat keluar lewat sisi lain. Graf berhingga, jadi suatu saat kita mengunjungi titik yang sudah dikunjungi, dan terbentuk siklus. Ide ini benar, tetapi menulisnya dengan rapi memerlukan kehati-hatian. Prinsip ekstremal memberi versi yang lebih bersih.

Solusi. Pilih lintasan terpanjang $v_0 v_1 \cdots v_k$ di graf (ada, karena graf berhingga; dan $k \geq 1$ karena derajat positif). Titik v_0 berderajat paling sedikit 2, jadi bertetangga dengan titik $w \neq v_1$. Jika w tidak pada lintasan, $w v_0 v_1 \cdots v_k$ adalah lintasan yang lebih panjang, kontradiksi. Jadi $w = v_i$ untuk suatu $i \geq 2$, dan $v_0 v_1 \cdots v_i v_0$ adalah siklus. ■

Refleksi. Argumen “lintasan terpanjang” muncul berulang kali di teori graf: untuk daun pohon (Soal 18.4), untuk siklus di sini, dan untuk banyak hasil lain. Akibat langsung: graf tanpa siklus memiliki titik berderajat paling banyak 1, dan dengan induksi (membuang titik itu) graf tanpa siklus dengan n titik memiliki paling banyak $n - 1$ sisi, fakta yang dipakai di Soal 33.22.

18.7 Wawasan sejarah dan konteks

Teori graf lahir pada 1736, ketika Leonhard Euler membuktikan bahwa tidak mungkin berjalan melintasi ketujuh jembatan Königsberg masing-masing tepat sekali: empat

daratan kota itu semuanya berderajat ganjil. Willem Mantel membuktikan teoremanya pada 1907, dan Pál Turán memperumumnya pada 1941 untuk graf tanpa K_r , meletakkan dasar kombinatorika ekstremal. Frank Ramsey menerbitkan teoremanya pada 1930, dalam makalah tentang logika, beberapa bulan sebelum wafat pada usia 26 tahun.

Kini teori graf adalah bahasa bagi jaringan komputer, media sosial, rute transportasi, dan struktur molekul. Di IMO, soal kombinatorika yang tampak “cerita” sering menjadi jelas begitu diterjemahkan ke graf, seperti IMO 2019 Soal 3 dan IMO 2020 Soal 3.

Inti Bab

Lema jabat tangan adalah penghitungan ganda paling sederhana. Argumen Ramsey dimulai dari satu titik dan sarang merpati pada tetangganya. Mantel adalah contoh ekstremal: graf tanpa segitiga memiliki paling banyak $\frac{n^2}{4}$ sisi.

Pohon dan sirkuit Euler memberi struktur; teorema Hall memberi kriteria pemasangan. Pertanyaan pertama untuk setiap soal kombinatorika: *apakah ini graf yang menyamar?*

Latihan

- 18.1** ★ Buktikan bahwa dalam setiap pesta, banyak orang yang berjabat tangan ganjil kali adalah genap.
- 18.2** ★ Adakah graf dengan lima titik yang semua titiknya berderajat 3?
- 18.3** ★★ Setiap dua dari 17 ilmuwan berkorespondensi tentang tepat satu dari tiga topik. Buktikan ada tiga ilmuwan yang saling berkorespondensi tentang topik yang sama. (IMO 1964)
- 18.4** ★★ Buktikan setiap pohon dengan $n \geq 2$ titik memiliki paling sedikit dua daun.
- 18.5** ★★ Dalam turnamen (setiap dua tim bertanding sekali, tanpa seri), buktikan tim-tim dapat diurutkan $T_1, T_2, \dots, T_n$ sehingga T_i mengalahkan T_{i+1} untuk semua i .
- 18.6** ★★★ Buktikan setiap graf memiliki subgraf bipartit yang memuat paling sedikit setengah dari sisinya.



Penghitungan Ganda

Hitung sesuatu dua kali, dan Anda mendapatkan persamaan gratis.

Penghitungan ganda adalah salah satu ide paling kuat dan paling sederhana dalam kombinatorika: identitas binomial, jumlah fungsi pembagi, dan bahkan ketaksamaan kombinatorika tersulit sering diperoleh dengan menghitung satu himpunan pasangan dari dua arah.

IMO 1998 Soal 2 di bab ini adalah contoh klasik yang sering ditiru soal modern, dan batas bawah IMO 2022 Soal 6 adalah penghitungan pasangan petak bertetangga. Bab ini melatih Anda menemukan “himpunan yang tepat untuk dihitung”.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) membuktikan identitas binomial dengan menghitung satu himpunan dengan dua cara; (2) memakai identitas Vandermonde dan tongkat hoki; (3) menukar urutan penjumlahan; (4) memakai penghitungan ganda untuk membuktikan ketaksamaan.

19.1 Prinsip

Jika sebuah himpunan dihitung dengan dua cara, kedua hasilnya sama. Biasanya kita menghitung *pasangan* (x, y) yang memenuhi suatu relasi: sekali dengan menjumlahkan atas x , sekali atas y .

CONTOH 19.1 Buktikan $k_{\binom{n}{k}} = n_{\binom{n-1}{k-1}}$.

Solusi. Hitung banyak cara memilih panitia beranggota k dari n orang beserta seorang ketua. Pilih panitia dulu lalu ketua: $\binom{n}{k} \cdot k$. Pilih ketua dulu lalu $k - 1$ anggota lain: $n \binom{n-1}{k-1}$. ■

★ **TEOREMA 19.1** (*Vandermonde*)
$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Bukti. Pilih k orang dari m pria dan n wanita; kelompokkan menurut banyak pria i . □

★ **TEOREMA 19.2** (*Tongkat hoki*)
$$\sum_{j=r}^n \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Bukti. Pilih $r + 1$ bilangan dari $\{1, \dots, n + 1\}$; kelompokkan menurut bilangan terbesar, $j + 1$. Sisanya r bilangan dipilih dari $\{1, \dots, j\}$. □

19.2 Menukar urutan penjumlahan

✎ **CONTOH 19.2** Buktikan
$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

Solusi. Kedua ruas menghitung pasangan (d, k) dengan $1 \leq k \leq n$ dan $d \mid k$. Menjumlahkan atas k memberi $\sum \tau(k)$. Untuk d tetap, banyak kelipatan d yang tidak melebihi n adalah $\lfloor n/d \rfloor$. ■

📖 **CATATAN** Akibatnya $\sum_{k \leq n} \tau(k) \leq n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$, sehingga rata-rata banyak pembagi bilangan sampai n hanya sekitar $\ln n$.

19.3 Penghitungan ganda untuk ketaksamaan

 **CONTOH 19.3** (IMO 1998) Dalam sebuah kompetisi ada a peserta dan b juri, dengan $b \geq 3$ ganjil. Setiap juri menilai setiap peserta “lulus” atau “gagal”. Misalkan k bilangan sehingga untuk setiap dua juri, penilaian mereka sama pada paling banyak k peserta. Buktikan $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Solusi. Hitung banyak tripel $(P, \{J_1, J_2\})$ dengan peserta P dan dua juri berbeda yang memberi penilaian sama kepada P .

Menurut pasangan juri: setiap pasangan setuju pada paling banyak k peserta, jadi banyak tripel paling banyak $k \binom{b}{2}$.

Menurut peserta: jika x juri meluluskan P , banyak pasangan yang setuju adalah $\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}$. Fungsi ini minimum saat x sedekat mungkin dengan $\frac{b}{2}$; karena b ganjil, minimumnya di $x = \frac{b+1}{2}$ dan bernilai

$$\binom{\frac{b-1}{2}}{2} + \binom{\frac{b+1}{2}}{2} = \frac{(b-1)(b-3) + (b+1)(b-1)}{8} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Jadi banyak tripel paling sedikit $a \cdot \frac{(b-1)^2}{4}$. Maka $a \frac{(b-1)^2}{4} \leq k \frac{b(b-1)}{2}$, yaitu $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$. ■

 **STRATEGI** Jika soal menyebut “setiap dua X memiliki paling banyak k Y bersama”, hitunglah tripel (Y, X_1, X_2) . Batas atas datang dari syarat soal; batas bawah datang dari konveksitas $\binom{x}{2}$ (Jensen atau Cauchy–Schwarz).

19.4 Studi kasus: dari coretan ke solusi

 **CONTOH 19.4** Buktikan $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ untuk setiap bilangan asli n .

Coretan pertama: cek kecil. $n = 6$: pembagiannya 1, 2, 3, 6 dengan $\varphi = 1, 1, 2, 2$, jumlahnya 6. Benar. Pembuktian lewat rumus φ untuk pangkat prima dan sifat perkalian bisa dilakukan, tetapi panjang. Peserta yang terlatih mencari *himpunan berukuran n* yang dapat dipecah menjadi kelompok berukuran $\varphi(d)$.

Ide. Pandang n pecahan $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ dan sederhanakan masing-masing. Setiap pecahan menjadi $\frac{a}{d}$ dengan $d | n$ dan FPB(a, d) = 1, $1 \leq a \leq d$.

Solusi. Pandang himpunan $S = \left\{ \frac{k}{n} : 1 \leq k \leq n \right\}$, berukuran n . Setiap unsur, setelah disederhanakan, berbentuk $\frac{a}{d}$ dengan $d \mid n$, $1 \leq a \leq d$, dan $\text{FPB}(a, d) = 1$. Sebaliknya, setiap pecahan $\frac{a}{d}$ seperti itu sama dengan $\frac{a(n/d)}{n}$, yang termasuk S . Jadi S terpecah menurut penyebut sederhananya d , dan kelompok untuk d berukuran tepat $\varphi(d)$. Menghitung S dua kali: $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$. ■

Refleksi. Kekuatan penghitungan ganda terletak pada pemilihan himpunan. Di sini himpunan pecahan $\frac{k}{n}$ adalah pilihan yang wajar karena $\varphi(d)$ menghitung pecahan sederhana berpenyebut d . Latihan: pakai ide yang sama untuk membuktikan bahwa $\sum_{k=1}^n \text{FPB}(k, n) = \sum_{d \mid n} d \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

19.5 Wawasan sejarah dan konteks

Penghitungan ganda sudah dipakai Euler dalam lema jabat tangan, dan identitas $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ dibuktikan Gauss dalam *Disquisitiones Arithmeticae*. Paul Erdős suka berbicara tentang “Buku” milik Tuhan yang memuat bukti-bukti paling indah; Martin Aigner dan Günter Ziegler kemudian menulis *Proofs from THE BOOK* (1998), dan banyak bukti di dalamnya adalah bukti penghitungan ganda.

Di IMO, penghitungan ganda sering tersembunyi di balik ketaksamaan kombinatorika, seperti IMO 1998 Soal 2 di bab ini dan batas bawah IMO 2022 Soal 6. Tanda-tandanya: soal menyebut “setiap dua objek berbagi paling banyak k ” atau meminta batas pada banyak objek yang memenuhi syarat lokal.

Inti Bab

Untuk identitas: carilah cerita kombinatorika yang dihitung oleh kedua ruas.
Untuk jumlah ganda: tukar urutan penjumlahan.

Untuk ketaksamaan: hitung tripel atau pasangan yang dibatasi syarat soal; batas atas datang dari syarat, batas bawah dari kekonveksan $\binom{x}{2}$. Pola “setiap dua X berbagi paling banyak k ” hampir selalu meminta penghitungan tripel.

Latihan

19.1 ★ Buktikan $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

19.2 ★ Buktikan $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

19.3 ★★ Buktikan jumlah semua unsur dari semua himpunan bagian $\{1, 2, \dots, n\}$ adalah $n(n+1)2^{n-2}$.

19.4 ★★ Dalam turnamen setengah kompetisi n tim tanpa seri, tim ke- i menang w_i kali dan kalah l_i kali. Buktikan $\sum w_i^2 = \sum l_i^2$.

19.5 ★★ Himpunan $\{1, \dots, n\}$ memiliki subhimpunan $A_1, \dots, A_m$, masing-masing beranggota 3, dan setiap dua subhimpunan beririsan paling banyak di satu unsur. Buktikan $m \leq \frac{n(n-1)}{6}$.

19.6 ★★★ Misalkan $p_n(k)$ banyak permutasi $\{1, \dots, n\}$ dengan tepat k titik tetap. Buktikan $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$. (IMO 1987)



Permainan dan Strategi

Soal permainan menanyakan siapa yang menang, tetapi menuntut strategi yang lengkap. Jawaban “pemain pertama menang” tidak bernilai tanpa strategi eksplisit yang berhasil melawan *semua* langkah lawan, atau tanpa argumen keberadaan seperti pencurian strategi.

Permainan muncul di IMO lebih sering daripada yang disadari: IMO 2018 Soal 4, IMO 2025 Soal 5, serta IMO 2026 Soal 3 dan Soal 4. Soal 4 tahun 2026 bahkan dapat diselesaikan dengan menggabungkan analisis permainan dengan invarian. Bab ini memberi kerangka berpikirnya.

© PETA BAB

Setelah bab ini Anda mampu: (1) menganalisis permainan dengan posisi menang dan kalah; (2) memakai strategi simetri; (3) memakai argumen pencurian strategi; (4) menyelesaikan Nim dengan XOR.

20.1 Posisi P dan posisi N

Pada permainan dua pemain yang bergantian, berinformasi lengkap, tanpa unsur acak, dan pasti berakhir, setiap posisi adalah **posisi P** (pemain yang baru saja melangkah menang, jadi pemain yang akan melangkah kalah) atau **posisi N** (pemain yang akan melangkah menang). Aturannya: posisi akhir adalah posisi P; sebuah posisi adalah N jika ada langkah ke posisi P; dan P jika semua langkah menuju posisi N.

 **CONTOH 20.1** Ada n batu. Dua pemain bergantian mengambil 1, 2, atau 3 batu; yang mengambil batu terakhir menang. Siapa yang menang?

Solusi. Posisi P tepat bila $4 \mid n$. Dari $n = 4k$, setiap langkah menyisakan bilangan yang bukan kelipatan 4; dari $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, ambil $n \bmod 4$ batu untuk menyisakan kelipatan 4. Jadi pemain pertama menang jika dan hanya jika $4 \nmid n$. ■

20.2 Strategi simetri

 **CONTOH 20.2** Dua pemain bergantian meletakkan koin identik di atas meja bundar tanpa tumpang tindih. Pemain yang tidak dapat meletakkan koin kalah. Siapa yang menang?

Solusi. Pemain pertama. Ia meletakkan koin pertama tepat di pusat meja, lalu setiap kali lawan meletakkan koin di X , ia meletakkan koin di pencerminan X terhadap pusat. Posisi cermin selalu kosong, karena susunan koin simetris terhadap pusat sebelum lawan melangkah, dan koin lawan tidak menutupi pusat. Jadi pemain pertama selalu dapat melangkah. ■

20.3 Pencurian strategi

 **CONTOH 20.3** (*Chomp*) Sebatang cokelat berbentuk persegi panjang $m \times n$ (tidak 1×1). Pemain bergantian memilih satu petak dan memakan petak itu beserta semua petak di atas dan di kanannya. Petak kiri bawah beracun; yang memakannya kalah. Buktikan pemain pertama memiliki strategi menang.

Solusi. Andaikan pemain kedua memiliki strategi menang. Misalkan pemain pertama memakan petak kanan atas saja. Pemain kedua menjawab dengan langkah menang X . Tetapi posisi setelah X dapat dicapai pemain pertama dalam satu langkah dari awal (karena memakan X juga memakan petak kanan atas). Maka pemain pertama dapat “mencuri” strategi itu dengan membuka permainan dengan X . Kontradiksi. Argumen ini membuktikan keberadaan strategi, tanpa menunjukkannya. ■

20.4 Nim

★ **TEOREMA 20.1** (Bouton) Dalam Nim dengan tumpukan berisi $a_1, \dots, a_k$ batu (setiap langkah mengambil berapa pun batu dari satu tumpukan; yang mengambil terakhir menang), posisi adalah P jika dan hanya jika $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k = 0$, dengan $\oplus$ penjumlahan biner tanpa simpanan (XOR).

Bukti. Posisi akhir memiliki XOR 0. Dari XOR 0, mengubah satu tumpukan mengubah XOR menjadi tidak nol. Dari XOR $s \neq 0$, ambil bit tertinggi s dan tumpukan a_i yang memuat bit itu; maka $a_i \oplus s < a_i$, dan mengubah a_i menjadi $a_i \oplus s$ membuat XOR menjadi 0. □

20.5 Studi kasus: dari coretan ke solusi

✎ **CONTOH 20.4** Sebatang cokelat berukuran $m \times n$ petak. Dua pemain bergantian mengambil satu potongan dan mematahkannya menjadi dua potongan sepanjang garis petak. Pemain yang tidak dapat melangkah (semua potongan berukuran 1×1) kalah. Siapa yang menang?

Coretan pertama: kasus kecil. 1×2 : satu patahan, pemain pertama menang. 2×2 : patahkan menjadi dua 1×2 ; lawan mematahkan satu; kita mematahkan yang lain; lawan tidak dapat melangkah. Pemain pertama menang lagi. 1×3 : patahkan menjadi 1×1 dan 1×2 ; lawan mematahkan 1×2 ; kita kalah. Atau 1×3 dipatahkan menjadi ... hanya itu pilihannya. Pemain kedua menang. Tampaknya strategi tidak penting sama sekali!

Mencari invarian. Setiap patahan menambah banyak potongan tepat satu. Mula-mula ada 1 potongan, dan di akhir ada mn potongan. Jadi banyak langkah *selalu* $mn - 1$, apa pun yang dilakukan pemain.

Solusi. Setiap langkah menambah banyak potongan tepat 1, dan permainan berakhir tepat ketika ada mn potongan. Jadi permainan selalu berlangsung tepat $mn - 1$ langkah. Pemain pertama melakukan langkah terakhir jika dan hanya jika $mn - 1$ ganjil, yaitu mn genap. Jadi pemain pertama menang jika mn genap, dan pemain kedua menang jika mn ganjil; strategi tidak berpengaruh. ■

Refleksi. Tidak semua “permainan” benar-benar permainan: kadang sebuah invarian menentukan hasil sepenuhnya. Sebelum mencari strategi yang rumit, periksa apakah

panjang permainan sudah ditentukan. Soal ini sering dijadikan jebakan di kompetisi: peserta menghabiskan waktu mencari strategi yang tidak ada.

20.6 Wawasan sejarah dan konteks

Charles Bouton menganalisis Nim secara lengkap pada 1901. Pada 1930-an Roland Sprague dan Patrick Grundy secara independen membuktikan bahwa setiap permainan imparisial (kedua pemain memiliki langkah yang sama) setara dengan satu tumpukan Nim, sehingga teori Nim menjadi dasar seluruh teori permainan kombinatorik. Argumen pencurian strategi dikaitkan dengan John Nash, yang memakainya untuk permainan Hex sekitar 1949; permainan Chomp dipopulerkan David Gale pada 1974.

Pada 1970-an John Conway, Elwyn Berlekamp, dan Richard Guy mengembangkan teori permainan partisan dalam *Winning Ways*, dan Conway menemukan bahwa permainan dapat dipandang sebagai sistem bilangan baru, *surreal numbers*.

Inti Bab

Analisis posisi P dan N dari belakang: posisi akhir adalah P, posisi yang dapat mencapai P adalah N. Pola sisa modulo biasanya muncul setelah beberapa posisi pertama dihitung.

Strategi simetri dan pencurian strategi memberi jawaban tanpa menghitung semua posisi. Nim dan XOR adalah model universal untuk permainan yang terpecah menjadi komponen-komponen independen.

Latihan

- 20.1** ★ Dari 2026 batu, pemain bergantian mengambil 1 sampai 5 batu; yang mengambil terakhir menang. Tentukan langkah pertama yang menang.
- 20.2** ★ Aturan seperti di atas, tetapi setiap langkah mengambil 1, 2, atau 4 batu. Tentukan semua posisi P.
- 20.3** ★★ Nim dengan tumpukan 3, 5, 7. Siapa yang menang, dan apa langkah pertamanya?
- 20.4** ★★ Sebuah benteng di petak kanan atas papan $n \times n$. Pemain bergantian menggeser benteng ke kiri atau ke bawah sejauh berapa pun. Yang tidak dapat melangkah kalah. Siapa menang?

- 20.5** ★★ Buktikan pada permainan silang-lingkaran 3×3 , pemain kedua tidak memiliki strategi menang.
- 20.6** ★★★ Bilangan $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$) ditulis di papan. Pemain bergantian memilih bilangan yang tersisa dan menghapus bilangan itu beserta semua pembaginya yang masih ada. Yang tidak dapat melangkah kalah. Buktikan pemain pertama menang.

Teknik Pembuktian

Sepuluh cara berpikir yang mengubah ide menjadi bukti yang sah, lengkap, dan layak nilai penuh. Ide yang benar belum tentu bernilai tujuh; bukti yang benar selalu bernilai tujuh.

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$



Sepuluh Teknik Pembuktian

Ide yang benar belum tentu bernilai tujuh. Penilai IMO memberi poin untuk bukti, bukan untuk intuisi. Setiap tahun ada peserta yang menemukan kunci soal tetapi kehilangan poin karena kasus terlewat, asumsi “tanpa mengurangi keumuman” yang tidak sah, atau langkah induksi yang bocor.

Bab ini merangkum sepuluh pola bukti yang dipakai di seluruh buku dan menunjukkan cara menulisnya dengan benar. Anggap bab ini sebagai daftar alat yang harus Anda periksa setiap kali menulis solusi: apakah bukti saya memakai salah satu pola ini, dan apakah saya memakainya dengan sah?

© PETA BAB

Bab ini merangkum sepuluh pola bukti yang muncul di seluruh buku. Setelah bab ini Anda mampu memilih pola yang sesuai, menulisnya dengan struktur yang jelas, dan menghindari celah logika yang paling sering membuat nilai berkurang.

21.1 Kontradiksi

Untuk membuktikan P , andaikan $\neg P$ lalu turunkan sesuatu yang mustahil.

 **CONTOH 21.1** Buktikan $\sqrt{2}$ irasional.

Solusi. Andaikan $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$. Maka $p^2 = 2q^2$, sehingga p genap, $p = 2p_1$, dan $q^2 = 2p_1^2$, sehingga q juga genap. Ini bertentangan dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$. ■

21.2 Induksi

Induksi biasa: buktikan $P(1)$ dan $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Induksi kuat: buktikan $P(n)$ dengan mengandaikan $P(1), \dots, P(n-1)$ semuanya benar.

 **CONTOH 21.2** Buktikan setiap bilangan bulat $n \geq 12$ dapat ditulis sebagai $4a + 5b$ dengan a, b bilangan bulat tak negatif.

Solusi. Kasus dasar: $12 = 4 \cdot 3$, $13 = 4 \cdot 2 + 5$, $14 = 4 + 5 \cdot 2$, $15 = 5 \cdot 3$. Untuk $n \geq 16$, menurut hipotesis induksi kuat $n - 4 = 4a + 5b$, sehingga $n = 4(a + 1) + 5b$. ■

 **AWAS** Langkah induksi harus berlaku untuk *setiap* n di atas kasus dasar. “Bukti” terkenal bahwa semua kuda berwarna sama gagal tepat di langkah $n = 1 \rightarrow n = 2$, karena dua himpunan kuda yang “tumpang tindih” ternyata tidak beririsan.

21.3 Prinsip ekstremal

Pilih objek yang “paling” sesuatu: terbesar, terkecil, terjauh, atau terpanjang. Sifat ekstremal itu biasanya memberi informasi tambahan.

 **CONTOH 21.3** Dalam turnamen (setiap dua pemain bertanding sekali, tanpa seri), buktikan ada pemain v sehingga setiap pemain lain dikalahkan v atau dikalahkan oleh seseorang yang dikalahkan v .

Solusi. Pilih v dengan banyak kemenangan maksimum. Andaikan ada u yang tidak dikalahkan v dan tidak dikalahkan korban mana pun dari v . Maka u mengalahkan v dan semua korban v , sehingga kemenangan u lebih banyak daripada kemenangan v . Kontradiksi. ■

21.4 Infinite descent

Jika dari setiap solusi dapat dibuat solusi yang “lebih kecil” (dalam bilangan asli), maka tidak ada solusi.

 **CONTOH 21.4** Buktikan tidak ada bilangan asli x, y, z, t dengan $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$.

Solusi. Dari persamaan, t genap; tulis $t = 2t_1$ dan bagi 2: $4x^4 + 2y^4 + z^4 = 8t_1^4$. Maka z genap; tulis $z = 2z_1$: $2x^4 + y^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4$. Maka y genap; tulis $y = 2y_1$: $x^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4$. Maka x genap; tulis $x = 2x_1$: $8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4$. Jadi (x_1, y_1, z_1, t_1) solusi dengan $t_1 < t$. Barisan bilangan asli yang turun tegas tak mungkin tak berhingga. ■

21.5 Konstruksi

Untuk pernyataan “ada”, cara paling meyakinkan adalah menunjukkan objeknya.

 **CONTOH 21.5** Buktikan untuk setiap $n \geq 3$ ada n bilangan asli berbeda sehingga jumlahnya habis dibagi masing-masing bilangan tersebut.

Solusi. Ambil $1, 2, 3, 6, 12, \dots, 3 \cdot 2^{n-3}$. Dengan induksi jumlahnya $3 \cdot 2^{n-2}$: untuk $n = 3$ jumlahnya 6, dan menambahkan $3 \cdot 2^{n-2}$ menggandakan jumlah. Jumlah $3 \cdot 2^{n-2}$ habis dibagi 1, 2, 3 dan setiap $3 \cdot 2^j$ dengan $j \leq n - 3$. ■

21.6 Eksistensi dan ketunggalan

Buktikan keduanya secara terpisah: eksistensi (misalnya dengan teorema nilai antara) dan ketunggalan (misalnya dengan kemonotonan).

 **CONTOH 21.6** Buktikan persamaan $x^3 + x = 1$ memiliki tepat satu akar real.

Solusi. $f(x) = x^3 + x - 1$ kontinu dengan $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$, jadi ada akar di $(0, 1)$ (teorema nilai antara). Karena x^3 dan x naik tegas, f naik tegas dan tidak dapat bernilai nol dua kali. ■

21.7 Analisis kasus

Bagi menjadi kasus-kasus yang *lengkap* dan tangani masing-masing. Kasus sering ditentukan oleh paritas, sisa modulo kecil, atau urutan variabel.

 **CONTOH 21.7** Tentukan semua bilangan prima p, q dengan $p^2 - 2q^2 = 1$.

Solusi. $(p-1)(p+1) = 2q^2$. Jika $p = 2$, ruas kiri 3, mustahil. Jadi p ganjil, dan $p-1$, $p+1$ dua bilangan genap berurutan, sehingga hasil kalinya habis dibagi 8. Maka $4 \mid q^2$, jadi $q = 2$ dan $p^2 = 9$. Jawaban: $(p, q) = (3, 2)$. ■

21.8 Lema lokal

Pecah ketaksamaan besar menjadi ketaksamaan kecil yang masing-masing mudah, lalu gabungkan.

CONTOH 21.8 Buktikan untuk $x, y, z > 0$ dengan $xyz = 1$: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$.

Solusi. Menurut Contoh 1.2, $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} = \frac{1}{1+1/z} = \frac{z}{z+1}$. Tinggal membuktikan

$$\frac{z}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{3}{4} = \frac{z^2 + z + 1}{(z+1)^2} - \frac{3}{4} = \frac{(z-1)^2}{4(z+1)^2} \geq 0.$$

Kesamaan pada $x = y = z = 1$. ■

21.9 Simetri dan “tanpa mengurangi keumuman”

Asumsi “misalkan $a \geq b \geq c$ ” hanya sah bila ekspresinya simetris. Untuk ekspresi siklis, kita hanya boleh memutar variabel, sehingga yang dapat diasumsikan adalah misalnya “ a terbesar” atau “ b berada di antara a dan c ”.

CONTOH 21.9 Buktikan untuk $a, b, c \geq 0$ dengan $a + b + c = 3$: $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$.

Solusi. Ekspresinya siklis, jadi dengan memutar variabel kita boleh mengasumsikan b berada di antara a dan c , yaitu $(a-b)(b-c) \geq 0$. Maka

$$b(a+c)^2 - (a^2b + b^2c + c^2a + abc) = c(a-b)(b-c) \geq 0.$$

Dengan AM-GM, $b(a+c)^2 = 4 \cdot b \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \leq 4 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 = 4$. Kesamaan terjadi pada $(1, 1, 1)$ dan $(2, 1, 0)$ beserta rotasi siklisnya. ■

⚠ AWAS Jika Anda menulis “tanpa mengurangi keumuman”, sebutkan *mengapa* tidak mengurangi keumuman. Penilai IMO memotong nilai untuk asumsi urutan pada ekspresi yang tidak simetris.

21.10 Contoh penyangkal

Untuk membantah pernyataan umum, satu contoh cukup, tetapi contoh itu harus diperiksa sepenuhnya.

🔍 CONTOH 21.10 Benarkah $n^2 + n + 41$ prima untuk semua bilangan asli n ?

Solusi. Tidak. Untuk $n = 40$, $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41^2$. Pernyataan ini benar untuk $n = 0, 1, \dots, 39$, sebuah peringatan bahwa banyak contoh yang cocok bukan bukti. ■

21.11 Studi kasus: dari coretan ke solusi

🔍 CONTOH 21.11 Buktikan bahwa untuk bilangan asli n , $\sqrt{n}$ rasional jika dan hanya jika n kuadrat sempurna.

Memilih teknik. Arah “jika” langsung. Arah sebaliknya adalah perumuman irasionalitas $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$. Bukti untuk $\sqrt{2}$ memakai paritas, dan bukti untuk $\sqrt{3}$ memakai keterbagian oleh 3; untuk n umum, keduanya digantikan oleh alat yang lebih kuat: faktorisasi prima tunggal (Bab 6).

Ide. Jika $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, maka $nq^2 = p^2$. Bandingkan pangkat setiap prima di kedua ruas: di p^2 dan q^2 semua pangkat genap, jadi di n juga.

Solusi. Jika $n = m^2$, jelas $\sqrt{n} = m$ rasional. Sebaliknya, misalkan $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ dengan p, q bilangan asli. Maka $nq^2 = p^2$. Untuk setiap prima r , $v_r(n) + 2v_r(q) = 2v_r(p)$, jadi $v_r(n)$ genap. Menurut ketunggalan faktorisasi prima, $n = \prod r^{v_r(n)} = \left(\prod r^{v_r(n)/2} \right)^2$ adalah kuadrat sempurna. ■

Refleksi. Perhatikan bahwa bukti ini tidak memerlukan kontradiksi maupun asumsi “pecahan dalam bentuk paling sederhana”; ia bekerja langsung dengan valuasi prima.

Memilih teknik yang tepat bisa membuat bukti lebih pendek *dan* lebih umum. Dengan argumen yang sama, $\sqrt[n]{n}$ rasional jika dan hanya jika n adalah pangkat ke- k sempurna.

21.12 Wawasan sejarah dan konteks

Penemuan bahwa $\sqrt{2}$ irasional dikaitkan dengan kaum Pythagoras (abad ke-5 SM); legenda menyebut Hippasus dari Metapontum dihukum karena membocorkannya, meskipun kisah itu kemungkinan besar hanya legenda. Prinsip induksi dipakai secara eksplisit oleh Blaise Pascal dalam *Traité du triangle arithmétique* (terbit 1665), dan dirumuskan secara aksiomatik oleh Giuseppe Peano pada 1889. James Joseph Sylvester mengajukan soal Sylvester–Gallai pada 1893, dan Tibor Gallai membuktikannya pada 1944.

Standar ketelitian bukti terus berkembang: kini bukti-bukti penting diperiksa dengan asisten bukti komputer, misalnya teorema empat warna dengan Coq dan dugaan Kepler dengan HOL Light dan Isabelle. Namun inti bukti yang baik tetap sama sejak Euklides: setiap langkah mengikuti dari langkah sebelumnya, dan tidak ada kasus yang terlewat.

Inti Bab

Sepuluh pola: kontradiksi, induksi, prinsip ekstremal, *descent*, konstruksi, eksistensi dan ketunggalan, analisis kasus, lema lokal, simetri, dan contoh penyangkal.

Tiga kebiasaan yang harus melekat: sebutkan dengan jelas pola apa yang dipakai; pastikan setiap kasus tercakup; dan bedakan dengan tegas antara “ada” (cukup satu contoh) dan “untuk semua” (perlu bukti umum).

Latihan

- 21.1 ★ Buktikan $\sqrt{3}$ irasional, lalu $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irasional.
- 21.2 ★ Buktikan dengan induksi $3 \mid n^3 + 2n$ untuk setiap bilangan asli n .
- 21.3 ★ Buktikan ketaksamaan Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ untuk $x > -1$ dan bilangan asli n .
- 21.4 ★★ Benar atau salah: $2^{2^n} + 1$ prima untuk semua $n \geq 0$?
- 21.5 ★★ Buktikan setiap bilangan asli dapat ditulis sebagai jumlah bilangan Fibonacci berbeda yang tidak berurutan (teorema Zeckendorf, bagian eksistensi).

- 21.6** ★★★ Diberikan himpunan berhingga titik di bidang yang tidak semuanya segaris. Buktikan ada garis yang melalui tepat dua titik dari himpunan itu (teorema Sylvester–Gallai).

BAGIAN
VI

Bedah IMO 2007–2026

Seratus dua puluh soal IMO selama dua puluh tahun: pernyataan soal, jawaban, ide kunci, dan pembahasan, disertai data skor tim Indonesia per soal. Di sinilah terlihat di mana poin diperoleh dan di mana poin hilang.



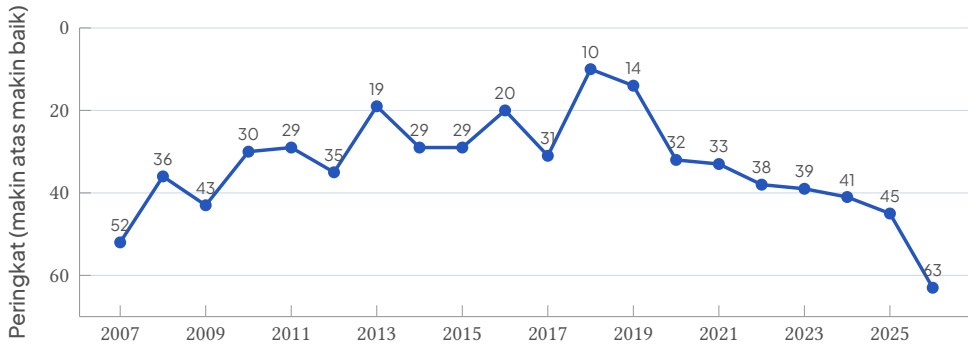
Ikhtisar Dua Puluh Tahun

Dua puluh tahun, seratus dua puluh soal, satu pola. Bagian ini membedakan seluruh soal IMO 2007–2026, periode sejak Indonesia kembali berpartisipasi tanpa jeda setelah absen pada 2006. Sebelum masuk ke soal demi soal, bab pendek ini memperlihatkan gambaran besarnya: bagaimana peringkat dan skor tim Indonesia bergerak, dan di soal mana poin diperoleh atau hilang.

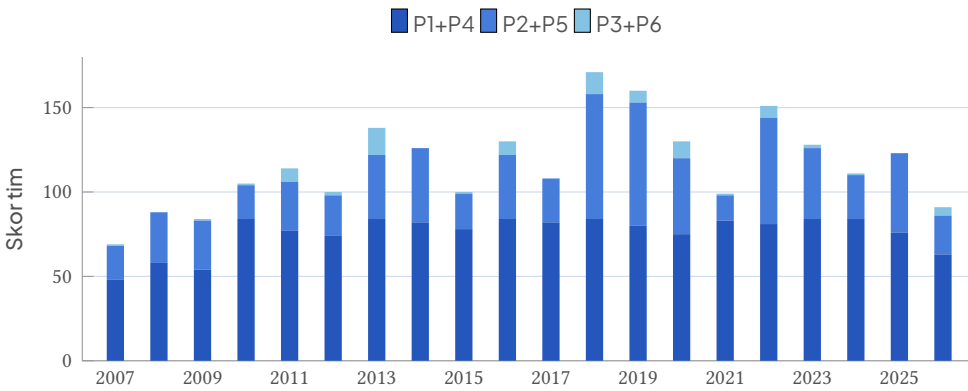
PETA BAB

Bab ini memberi peta data 20 tahun: tren peringkat, tren skor total, rata-rata per nomor soal, dan daftar medali, sebagai konteks untuk membaca setiap bab tahunan sesudahnya.

22.1 Peringkat dan skor total



Gambar 22.1. Peringkat tim Indonesia di IMO 2007–2026. Sumber: imo-official.org.



Gambar 22.2. Skor tim Indonesia menurut kelompok soal, 2007–2026.

Kedua grafik menceritakan tiga babak. *2007–2012*: fondasi dibangun; skor P1+P4 naik dari 48 ke sekitar 80, dan peringkat membaik dari 52 ke kisaran 30. *2013–2019*: masa puncak; emas pertama diraih pada 2013, lalu P2+P5 melonjak ke atas 70 pada 2018–2019 dan peringkat mencapai 10. *2020–2026*: P1+P4 tetap kokoh, tetapi P2+P5 turun kembali dan standar dunia naik, sehingga peringkat merosot ke 63 pada 2026.

22.2 Rata-rata per nomor soal

Periode	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2007–2016 (per peserta)	6,03	2,27	0,45	6,02	2,62	0,20
2017–2026 (per peserta)	6,63	3,68	0,45	6,57	3,55	0,32

Dalam dua dekade, P1 dan P4 naik dari sekitar 6,0 ke 6,6 poin, dan P2 serta P5 naik dari sekitar 2,4 ke 3,6 poin. Kemajuan nyata terjadi di soal menengah, tetapi masih jauh dari 7. Soal nomor 3 dan 6 praktis tidak bergerak.

22.3 Medali 2007–2026

Tahun				HM	Tahun				HM
2007	–	1	–	4	2017	–	2	3	1
2008	–	1	2	2	2018	1	5	–	–
2009	–	–	4	1	2019	1	4	1	–
2010	–	1	4	1	2020	2	–	2	2
2011	–	2	4	–	2021	–	2	4	–
2012	–	1	3	1	2022	–	1	4	1
2013	1	1	4	–	2023	–	1	3	2
2014	–	2	3	1	2024	1	–	3	2
2015	–	2	4	–	2025	–	–	4	2
2016	–	3	3	–	2026	–	–	4	1

Dalam 20 tahun, tim Indonesia meraih 6 emas, 30 perak, 61 perunggu, dan 26 HM. Keenam emas Indonesia sepanjang sejarah diraih dalam periode ini (2013, 2018, 2019, 2020 dua kali, dan 2024).

Inti Bab

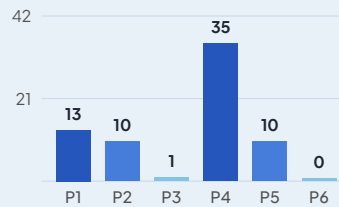
Pola dua dekade konsisten: soal nomor 1 dan 4 sudah dikuasai, soal nomor 3 dan 6 belum tersentuh, dan *naik-turunnya prestasi ditentukan oleh soal nomor 2 dan 5*. Tahun-tahun terbaik (2013, 2016, 2018, 2019) adalah tahun ketika P2+P5 atau P3+P6 memberi tambahan yang berarti. Bacalah bab-bab tahunan berikut dengan pertanyaan: “Apa yang dibutuhkan untuk menyelesaikan soal nomor 2 dan 5 tahun ini?”

IMO 2007

Hanoi 2007 adalah titik awal periode ini: peringkat 52, total 69 poin, satu perak dan empat HM. Yang mencolok adalah skor Soal 1 yang hanya 13: soal ketaksamaan berkonstruksi yang tampak sederhana ternyata menjebak. Sebaliknya Soal 4 (geometri) diselesaikan dengan baik (35 poin).

Tuan rumah Hanoi, Vietnam
 Partisipasi 93 negara
 Batas medali 29 / 21 / 14 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 52, total 69 poin

1 perak 4 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 ALJABAR

Diberikan bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_n$. Untuk setiap i didefinisikan $d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$ dan $d = \max_i d_i$. (a) Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan real $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ berlaku $\max_i |x_i - a_i| \geq \frac{d}{2}$. (b) Tunjukkan ada $x_1 \leq \dots \leq x_n$ yang membuat kesamaan berlaku.

🔍 Ide kunci. Nilai d dicapai oleh pasangan indeks $p \leq q$ dengan $a_p - a_q = d$; barisan naik tidak dapat mendekati keduanya sekaligus.

Solusi. (a) Misalkan $d = d_i$. Ada $p \leq i \leq q$ dengan $a_p = \max_{j \leq i} a_j$ dan $a_q = \min_{j \geq i} a_j$, sehingga $a_p - a_q = d$. Karena $x_p \leq x_q$,

$$(a_p - x_p) + (x_q - a_q) \geq a_p - a_q = d,$$

jadi salah satu dari $|x_p - a_p|$ dan $|x_q - a_q|$ paling sedikit $\frac{d}{2}$.

(b) Definisikan $x_i = M_i - \frac{d}{2}$ dengan $M_i = \max_{j \leq i} a_j$; barisan ini tidak turun. Karena $M_i \geq a_i$, $x_i - a_i \geq -\frac{d}{2}$. Karena $a_i \geq m_i = \min_{j \geq i} a_j$, $x_i - a_i \leq M_i - m_i - \frac{d}{2} = d_i - \frac{d}{2} \leq \frac{d}{2}$. Jadi $|x_i - a_i| \leq \frac{d}{2}$ untuk semua i . ■

SOAL 2 GEOMETRI

Lima titik A, B, C, D, E memenuhi: $ABCD$ jajaran genjang dan $BCED$ segi empat talibusur. Garis ℓ melalui A memotong ruas DC di dalamnya di F dan garis BC di G , dengan $EF = EG = EC$. Buktikan ℓ membagi dua sudut DAB .

Arah penyelesaian. Misalkan K titik tengah CG dan L titik tengah CF ; karena E berjarak sama ke C, F, G , $EK \perp BC$ dan $EL \perp CD$. Tunjukkan segitiga EKB dan ELD sebangun (sudut di B dan D sama karena $BCED$ talibusur), lalu kejar panjang untuk memperoleh $CG = CF$; maka segitiga CFG sama kaki dan, karena $AB \parallel DC$ dan $AD \parallel BC$, $\angle DAF = \angle FAB$.

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Dalam sebuah kompetisi, beberapa peserta berteman (timbang balik). Sebuah klik adalah kelompok yang setiap dua anggotanya berteman. Ukuran klik terbesar genap. Buktikan peserta dapat dibagi ke dua ruangan sehingga ukuran klik terbesar di kedua ruangan sama.

Arah penyelesaian. Mulai dengan klik terbesar M (ukuran $2m$) di ruang A dan semua peserta lain di ruang B . Pindahkan anggota M satu per satu ke B selama klik terbesar di A lebih besar dari di B ; besaran ini berubah paling banyak satu setiap langkah. Analisis kasus saat berhenti, dengan memanfaatkan maksimalitas M , menghasilkan keseimbangan.

SOAL 4 GEOMETRI

Pada segitiga ABC , garis bagi $\angle BCA$ memotong lingkaran luar lagi di R , sumbu BC di P , dan sumbu AC di Q . Titik K dan L titik tengah BC dan AC . Buktikan segitiga RPK dan RQL memiliki luas yang sama.

Ide kunci. $CQ = RP$ dan $CP = RQ$, sehingga kedua luas dapat ditulis dengan faktor yang sama.

Solusi. Misalkan $\gamma = \frac{C}{2}$ dan O pusat lingkaran luar, yaitu perpotongan kedua sumbu.

Klaim 1. $CP = RQ$ dan $CQ = RP$.

Bukti klaim. Segitiga siku-siku CKP dan CLQ memiliki sudut γ di C , jadi $\angle CPK = \angle CQL = 90^\circ - \gamma$, sehingga $\angle OPQ = \angle OQP$ dan $OP = OQ$. Karena $OC = OR$, kaki tegak lurus dari O ke garis CR adalah titik tengah CR sekaligus titik tengah PQ . Dua ruas dengan titik tengah yang sama memberi $CP = RQ$ dan $CQ = RP$. $\square$

Klaim 2. Rumus luas.

Bukti klaim. $PK = CP \sin \gamma$ dan $QL = CQ \sin \gamma$. Sudut $\angle RPK$ dan $\angle RQL$ masing-masing sama dengan $90^\circ + \gamma$ atau suplemennya, jadi sinusnya sama, yaitu $\cos \gamma$. Maka $[RPK] = \frac{1}{2} RP \cdot CP \sin \gamma \cos \gamma$ dan $[RQL] = \frac{1}{2} RQ \cdot CQ \sin \gamma \cos \gamma$. $\square$

Kesimpulan. Menurut klaim 1, $RP \cdot CP = CQ \cdot RQ$, jadi kedua luas sama. $\blacksquare$

SOAL 5 TEORI BILANGAN

Bilangan asli a, b memenuhi $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$. Buktikan $a = b$.

Ide kunci. Ubah syarat menjadi $4ab - 1 \mid (a - b)^2$, lalu *Vieta jumping*.

Arah penyelesaian. Modulo $m = 4ab - 1$ berlaku $4ab \equiv 1$, jadi $a \equiv (4b)^{-1}$. Maka $4a^2 - 1 \equiv \frac{1-4b^2}{4b^2}$ dan $a - b \equiv \frac{1-4b^2}{4b}$, sehingga $m \mid (4a^2 - 1)^2$ jika dan hanya jika $m \mid (a - b)^2$. Misalkan $(a - b)^2 = k(4ab - 1)$ dengan $k \geq 1$; ambil pasangan dengan $a + b$ minimum. Sebagai persamaan kuadrat dalam a , akar lainnya $a' = 2b + 4kb - a = \frac{b^2 + k}{a}$ positif dan lebih kecil, kontradiksi. Jadi $k = 0$ dan $a = b$.

SOAL 6 KOMBINATORIKA / ALJABAR

Misalkan n bilangan asli dan $S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$, yaitu $(n + 1)^3 - 1$ titik. Tentukan banyak bidang terkecil yang gabungannya memuat S tetapi tidak memuat titik $(0, 0, 0)$.

Jawaban: $3n$.

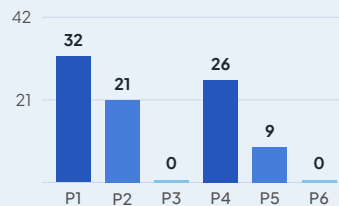
 **Arah penyelesaian.** Bidang $x + y + z = i$ untuk $i = 1, \dots, 3n$ memenuhi. Untuk batas bawah, andaikan cukup $m < 3n$ bidang; hasil kali persamaan linearnya adalah polinomial derajat m yang nol di semua titik S tetapi tidak nol di titik asal. Argumen polinomial (Nullstellensatz kombinatorik atau selisih hingga) menunjukkan polinomial seperti itu harus berderajat paling sedikit $3n$.

 **Pelajaran.** Skor 13 di Soal 1 adalah pengingat bahwa “soal nomor 1” tidak selalu mudah bagi peserta yang belum terbiasa dengan soal konstruktif. Kuncinya adalah langkah ekstremal: pilih indeks yang mewujudkan d . Kebiasaan ini dibahas di Bab 21.

IMO 2008

Madrid 2008 memberi Indonesia satu perak, dua perunggu, dan dua HM, peringkat 36 dengan 88 poin. Soal 1 (geometri) dan Soal 4 (persamaan fungsional) adalah soal yang “ramah”, tetapi skor tim di kedua soal belum sempurna (32 dan 26). Soal 2 bagian (a) menjadi contoh indah kekuatan substitusi.

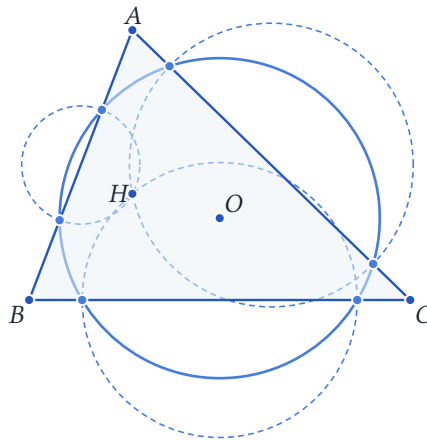
Tuan rumah Madrid, Spanyol
 Partisipasi 97 negara
 Batas medali 31 / 22 / 15 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 36, total 88 poin
 1 perak  2 perunggu  2 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 GEOMETRI

Segitiga lancip ABC memiliki titik tinggi H . Lingkaran yang melalui H dan berpusat di titik tengah BC memotong garis BC di A_1 dan A_2 . Titik B_1, B_2, C_1, C_2 didefinisikan serupa. Buktikan keenam titik $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ konsiklis.



Gambar 24.1. IMO 2008 Soal 1: tiga lingkaran kecil (putus-putus) melalui H ; keenam titik potongnya terletak pada satu lingkaran berpusat O .

Ide kunci. A terletak pada sumbu radikal lingkaran berpusat titik tengah CA dan AB .

Solusi. Misalkan M_a, M_b, M_c titik tengah BC, CA, AB , dan $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lingkaran berpusat di titik-titik itu yang melalui H .

Klaim 1. B_1, B_2, C_1, C_2 konsiklis.

Bukti klaim. Lingkaran ω_b dan ω_c sama-sama melalui H , jadi sumbu radikalnya adalah garis melalui H yang tegak lurus M_bM_c . Karena $M_bM_c \parallel BC$, garis itu adalah garis tinggi dari A , sehingga A berkuasa sama terhadap ω_b dan ω_c : $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$ (panjang berarah; B_1, B_2 pada garis AC dan C_1, C_2 pada garis AB). Menurut kebalikan kuasa titik, keempat titik konsiklis. $\square$

Klaim 2. Pusat lingkaran itu adalah O .

Bukti klaim. Pusatnya terletak pada sumbu B_1B_2 , yaitu garis melalui M_b yang tegak lurus AC (sebab B_1, B_2 simetris terhadap M_b), yaitu sumbu AC ; serupa pada sumbu AB . Jadi pusatnya O , dan jari-jarinya $OB_1^2 = OM_b^2 + M_bH^2$. $\square$

Kesimpulan. Dengan cara sama, A_1, A_2, B_1, B_2 terletak pada lingkaran berpusat O dengan jari-jari kuadrat $OM_b^2 + M_bH^2$ (lingkaran yang sama, karena memuat B_1). Jadi keenam titik terletak pada lingkaran berpusat O . $\blacksquare$

SOAL 2 ALJABAR

(a) Buktikan $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$ untuk semua bilangan real $x, y, z \neq 1$ dengan $xyz = 1$. (b) Buktikan kesamaan berlaku untuk tak hingga banyak tripel bilangan rasional $x, y, z \neq 1$ dengan $xyz = 1$.

 **Ide kunci.** Substitusi $a = \frac{x}{x-1}$ mengubah syarat $xyz = 1$ menjadi syarat linear-kuadrat yang sederhana.

Solusi. (a) Misalkan $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$, $c = \frac{z}{z-1}$, sehingga $x = \frac{a}{a-1}$ dan seterusnya. Syarat $xyz = 1$ menjadi $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$, yaitu $ab + bc + ca = a + b + c - 1$. Dengan $s = a + b + c$:

$$a^2 + b^2 + c^2 = s^2 - 2(ab + bc + ca) = s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1 \geq 1.$$

(b) Kesamaan setara dengan $a+b+c = 1$ dan $ab+bc+ca = 0$. Parametrisasi rasional kurva ini (misalnya dengan c sebagai parameter dan syarat diskriminan kuadrat sempurna) memberi tak hingga banyak tripel rasional; tinggal memeriksa $a, b, c \neq 1$ dan memetakan kembali ke x, y, z . ■

SOAL 3 TEORI BILANGAN

Buktikan ada tak hingga banyak bilangan asli n sehingga $n^2 + 1$ memiliki faktor prima yang lebih besar dari $2n + \sqrt{2n}$.

 **Arah penyelesaian.** Ambil prima $p \equiv 1 \pmod{4}$ yang besar (ada tak hingga, Bab 9) dan n terkecil dengan $p \mid n^2 + 1$, $0 < n < \frac{p}{2}$. Tulis $p - 2n = k$; dari $p \mid n^2 + 1$ diperoleh $p \mid k^2 + 4$, sehingga $k^2 + 4 \geq p$ dan $k \geq \sqrt{p-4}$. Maka $p \geq 2n + \sqrt{p-4}$, dan manipulasi memberi $p > 2n + \sqrt{2n}$.

SOAL 4 ALJABAR

Tentukan semua $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ sehingga $\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$ untuk semua bilangan positif w, x, y, z dengan $wx = yz$.

Jawaban: $f(x) = x$ dan $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solusi. Langkah 1. $w = x = y = z = 1$: $\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = 1$, jadi $f(1) = 1$.

Langkah 2. Untuk $t > 0$ ambil $w = t$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{t}$: $\frac{f(t)^2+1}{2f(t)} = \frac{t^2+1}{2t}$, yaitu $tf(t)^2 - (t^2+1)f(t) + t = 0$, atau $(tf(t)-1)(f(t)-t) = 0$. Jadi untuk setiap t , $f(t) = t$ atau $f(t) = \frac{1}{t}$.

Langkah 3. Andaikan ada $a \neq 1$ dengan $f(a) = a$ dan $b \neq 1$ dengan $f(b) = \frac{1}{b}$. Ambil $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$: $f(ab) = \frac{ab(a^2+b^{-2})}{a^2+b^2}$. Jika $f(ab) = ab$, maka $a^2 + b^{-2} = a^2 + b^2$, jadi $b = 1$; jika $f(ab) = \frac{1}{ab}$, maka $a^2b^2(a^2 + b^{-2}) = a^2 + b^2$, yaitu $a^4b^2 = b^2$, jadi $a = 1$. Kontradiksi.

Kesimpulan. Jadi $f(x) = x$ untuk semua x atau $f(x) = \frac{1}{x}$ untuk semua x . Keduanya memenuhi: untuk $f(x) = \frac{1}{x}$, ruas kiri $\frac{w^{-2}+x^{-2}}{y^{-2}+z^{-2}} = \frac{(w^2+x^2)y^2z^2}{w^2x^2(y^2+z^2)}$, dan $w^2x^2 = y^2z^2$. ■

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Misalkan $k \geq n$ dengan $k - n$ genap. Ada $2n$ lampu bernomor 1 sampai $2n$, mula-mula mati. Satu langkah mengubah keadaan satu lampu. N adalah banyak barisan k langkah yang berakhir dengan lampu $1, \dots, n$ menyala dan $n+1, \dots, 2n$ mati; M adalah banyak barisan seperti itu yang tidak pernah menyentuh lampu $n+1, \dots, 2n$. Tentukan $\frac{N}{M}$.

Jawaban: 2^{k-n} (diperiksa dengan komputer untuk kasus kecil).

 **Arah penyelesaian.** Petakan setiap barisan jenis N ke barisan jenis M dengan mengganti setiap sentuhan lampu $n+i$ menjadi sentuhan lampu i . Setiap barisan jenis M adalah bayangan dari tepat 2^{k-n} barisan jenis N : untuk setiap lampu i yang disentuh t_i kali (ganjil), pilih himpunan bagian berukuran genap dari sentuhan itu untuk dialihkan ke lampu $n+i$, ada 2^{t_i-1} pilihan, dan $\prod 2^{t_i-1} = 2^{k-n}$.

SOAL 6 GEOMETRI

Segi empat konveks $ABCD$ dengan $BA \neq BC$ memiliki lingkaran dalam ω_1 (segitiga ABC) dan ω_2 (segitiga ADC). Ada lingkaran ω yang menyinggung sinar BA di luar A , sinar BC di luar C , serta garis AD dan CD . Buktikan garis singgung persekutuan luar ω_1 dan ω_2 berpotongan pada ω .

 **Arah penyelesaian.** Titik potong garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah pusat homoteti luarnya. Teorema Monge (d'Alembert) untuk tiga lingkaran $\omega_1, \omega_2, \omega$ dan pengamatan bahwa lingkaran ω menyinggung ω_1 serta ω_2 dalam konfigu-

rasi homoteti tertentu menyelesaikan soal; langkah tersulit adalah membuktikan syarat singgung itu dari kondisi $AB + AD = CB + CD$ yang muncul dari keberadaan ω .

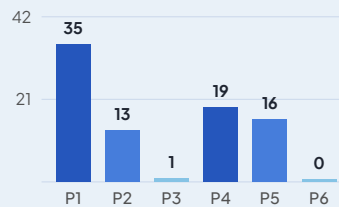
 **Pelajaran.** Soal 1 dan Soal 4 tahun ini masing-masing hanya membutuhkan satu ide (sumbu radikal; substitusi $w = t$, $y = z = \sqrt{t}$). Skor tim 32 dan 26 menunjukkan bahwa penulisan lengkap, termasuk langkah “campuran tidak mungkin” pada Soal 4, masih menjadi titik lemah.

IMO 2009

Bremen 2009, IMO ke-50: Indonesia memperoleh empat perunggu dan satu HM, peringkat 43 dengan 84 poin. Soal 4 (geometri) hanya menghasilkan 19 poin, di bawah biasanya, sedangkan Soal 1 adalah soal teori bilangan yang dapat diselesaikan dalam beberapa baris.

Tuan rumah Bremen, Jerman
 Partisipasi 104 negara
 Batas medali 32 / 24 / 14 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 43, total 84 poin

 4 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 TEORI BILANGAN

Misalkan n bilangan asli dan $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) bilangan bulat berbeda di $\{1, \dots, n\}$ sehingga $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ untuk $i = 1, \dots, k-1$. Buktikan $n \nmid a_k(a_1 - 1)$.

 **Ide kunci.** Hitung hasil kali $a_1 a_2 \cdots a_k$ modulo n dengan dua cara.

Solusi. Syaratnya $a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod{n}$. Andaikan juga $a_k a_1 \equiv a_k$. Misalkan $P = a_1 a_2 \cdots a_k$.

Klaim 1. $P \equiv a_1$.

Bukti klaim. Dari belakang: $a_{k-1} a_k \equiv a_{k-1}$, jadi $P \equiv a_1 \cdots a_{k-1}$; ulangi sampai tersisa a_1 .

□

Klaim 2. $P \equiv a_2$.

Bukti klaim. Tulis $P = (a_2 \cdots a_{k-1})(a_k a_1) \equiv a_2 \cdots a_{k-1} a_k$ memakai pengandaian, lalu kurangi dari belakang seperti di klaim 1 sampai tersisa a_2 . $\square$

Kesimpulan. $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$ dengan $a_1, a_2 \in \{1, \dots, n\}$, jadi $a_1 = a_2$, bertentangan dengan syarat berbeda. $\blacksquare$

SOAL 2 GEOMETRI

Segitiga ABC berpusat lingkaran luar O . Titik P dan Q di dalam sisi CA dan AB . Misalkan K, L, M titik tengah BP, CQ, PQ , dan Γ lingkaran melalui K, L, M . Jika PQ menyinggung Γ , buktikan $OP = OQ$.

 **Ide kunci.** $OP = OQ$ setara dengan $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$ (kuasa titik terhadap lingkaran luar).

 **Arah penyelesaian.** $MK \parallel QB$ dan $ML \parallel PC$ (garis tengah), dengan $MK = \frac{QB}{2}$ dan $ML = \frac{PC}{2}$. Karena PQ menyinggung Γ di M , sudut singgung–tali busur memberi $\angle(PQ, MK) = \angle MLK$ dan $\angle(QP, ML) = \angle MKL$; dengan kesejajaran, sudut-sudut ini sama dengan sudut di Q dan P pada segitiga APQ . Jadi segitiga MKL sebangun dengan segitiga APQ , dan $\frac{MK}{ML} = \frac{AP}{AQ}$, yaitu $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$. Ruas kiri dan kanan adalah minus kuasa P dan Q terhadap lingkaran luar, jadi $R^2 - OP^2 = R^2 - OQ^2$.

SOAL 3 ALJABAR

Barisan naik tegas bilangan asli $s_1 < s_2 < \cdots$ memiliki sifat: subbarisan $s_{s_1}, s_{s_2}, \dots$ dan $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \dots$ keduanya barisan aritmetika. Buktikan $s_1, s_2, \dots$ barisan aritmetika.

 **Arah penyelesaian.** Misalkan $D = s_{n+1} - s_n$ terbatas (dari sifat barisan aritmetika) dan pandang nilai minimum dan maksimum selisih. Pertimbangan ekstremal menunjukkan beda kedua barisan aritmetika itu sama dan akhirnya semua selisih sama.

SOAL 4 GEOMETRI

Pada segitiga ABC dengan $AB = AC$, garis bagi $\angle CAB$ dan $\angle ABC$ memotong BC dan CA di D dan E . Misalkan K pusat lingkaran dalam segitiga ADC . Jika $\angle BEK = 45^\circ$, tentukan semua nilai $\angle CAB$ yang mungkin.

Jawaban: 60° dan 90° .

⚡ **Arah penyelesaian.** Misalkan I pusat lingkaran dalam ABC ; maka K terletak pada CI . Nyatakan semua sudut dalam $\alpha = \angle CAB$ dan kejar sudut; syarat $\angle BEK = 45^\circ$ menjadi persamaan trigonometri dengan dua penyelesaian $\alpha = 60^\circ$ dan $\alpha = 90^\circ$ (keduanya dicek dengan konstruksi eksplisit).

🏆 SOAL 5 ALJABAR

Tentukan semua $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga untuk semua bilangan asli a, b ada segitiga nondegenerasi dengan panjang sisi a , $f(b)$, dan $f(b + f(a) - 1)$.

Jawaban: $f(n) = n$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Dengan $a = 1$: $f(b)$ dan $f(b + f(1) - 1)$ berselisih kurang dari 1, jadi sama; tunjukkan $f(1) = 1$ (jika tidak, f periodik dan terbatas, bertentangan dengan a besar). Lalu $b = 1$ memberi $f(f(a)) = a$, dan ketaksamaan segitiga memaksa $f(n) = n$ dengan induksi.

🏆 SOAL 6 KOMBINATORIKA

Bilangan asli berbeda $a_1, \dots, a_n$ dan himpunan M berisi $n - 1$ bilangan asli yang tidak memuat $s = a_1 + \dots + a_n$. Seekor belalang melompat dari 0 ke kanan dengan n lompatan sepanjang $a_1, \dots, a_n$ dalam suatu urutan. Buktikan urutannya dapat dipilih sehingga belalang tidak pernah mendarat di titik M .

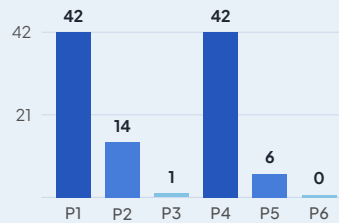
⚡ **Arah penyelesaian.** Induksi kuat pada n dengan analisis kasus pada lompatan terbesar dan pada banyak titik M yang kecil; soal ini adalah salah satu soal kombinatorika tersulit dalam sejarah IMO.

🏆 **Pelajaran.** Soal 1 tahun ini adalah contoh sempurna teknik “hitung hal yang sama dua kali” pada modulo (Bab 7). Skor Soal 4 yang rendah menunjukkan bahwa pengejaran sudut dengan parameter (soal “tentukan semua sudut”) perlu dilatih secara khusus.

IMO 2010

Astana 2010: satu perak, empat perunggu, satu HM, peringkat 30 dengan 105 poin. Soal 1 dan Soal 4 diselesaikan sempurna (42 dan 42); tahun ini menandai tercapainya konsistensi pada soal mudah, yang terus bertahan hingga kini.

Tuan rumah Astana, Kazakhstan
 Partisipasi 95 negara
 Batas medali 27 / 21 / 15 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 30, total 105 poin
 1 perak  4 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 ALJABAR

Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$ untuk semua bilangan real x, y .

Jawaban: $f \equiv 0$ dan $f \equiv C$ dengan $1 \leq C < 2$.

Solusi. Substitusi $x = 0$: $f(0) = f(0) \lfloor f(y) \rfloor$ untuk semua y .

Kasus 1: $f(0) \neq 0$. Maka $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ untuk semua y , dan persamaan menjadi $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)$. Untuk $x \in [1, 2)$: $f(y) = f(x)$ untuk semua y , jadi f konstan C dengan $\lfloor C \rfloor = 1$, yaitu $1 \leq C < 2$. Pemeriksaan: $C = C \cdot 1$.

Kasus 2: $f(0) = 0$. Untuk $x \in [0, 1)$: $0 = f(0) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$ untuk semua y . Jika $\lfloor f(y) \rfloor = 0$ untuk semua y , ruas kanan selalu 0, dan $x = 1$ memberi $f(y) = 0$ untuk

semua y . Jika ada y_0 dengan $\lfloor f(y_0) \rfloor \neq 0$, maka $f(x) = 0$ untuk $x \in [0, 1)$. Untuk sembarang z , pilih bilangan bulat N dengan $|N| > |z|$ dan tanda sama dengan z (atau $N = 1$ jika $z = 0$), sehingga $\frac{z}{N} \in [0, 1)$; substitusi $x = N$, $y = \frac{z}{N}$: $f(z) = f(N)\lfloor f(z/N) \rfloor = f(N) \cdot 0 = 0$. Jadi $f \equiv 0$.

Kesimpulan. Solusinya $f \equiv 0$ dan $f \equiv C$ dengan $1 \leq C < 2$. ■

SOAL 2 GEOMETRI

Ipusat lingkaran dalam segitiga ABC dan Γ lingkaran luarnya. Garis AI memotong Γ lagi di D . Titik E pada busur BDC dan F pada BC dengan $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Misalkan G titik tengah IF . Buktikan DG dan EI berpotongan pada Γ .

 **Arah penyelesaian.** Misalkan EI memotong Γ lagi di X ; cukup tunjukkan X, G, D segaris. Gunakan lema pusat dalam–pusat singgung luar ($DI = DB = DC$) dan kesebangunan dari $\angle BAF = \angle CAE$ (garis AF dan AE isogonal); ide yang umum adalah menambahkan pantulan I terhadap D , yaitu pusat singgung luar I_A , sehingga $DG \parallel FI_A$ dan soal menjadi pernyataan tentang kesegarisan X, F, I_A .

SOAL 3 TEORI BILANGAN

Tentukan semua $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga $(g(m) + n)(g(n) + m)$ kuadrat sempurna untuk semua bilangan asli m, n .

Jawaban: $g(n) = n + c$ untuk konstanta bulat $c \geq 0$.

 **Arah penyelesaian.** Kunci: jika prima p membagi $g(k+1) - g(k)$, pilih n sehingga v_p dari salah satu faktor ganjil dan faktor lainnya tidak habis dibagi p ; kontradiksi. Jadi $g(k+1) - g(k) = \pm 1$, lalu g injektif dan naik memberi $g(n) = n + c$.

SOAL 4 GEOMETRI

Titik P di dalam segitiga ABC . Garis AP, BP, CP memotong lingkaran luar Γ lagi di K, L, M . Garis singgung Γ di C memotong AB di S . Jika $SC = SP$, buktikan $MK = ML$.

 **Ide kunci.** $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$, jadi SP menyinggung lingkaran APB .

 **Arah penyelesaian.** Dari $SP^2 = SA \cdot SB$, sudut singgung memberi $\angle SPA = \angle PBA$. Kejar sudut dengan sudut keliling pada Γ untuk menunjukkan $\angle MKL = \angle MLK$, yaitu segitiga MKL sama kaki. (Solusi alternatif: segitiga KLM sebangun dengan segitiga pedal/segitiga P terhadap ABC .)

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Enam kotak $B_1, \dots, B_6$ masing-masing mula-mula berisi satu koin. Operasi 1: ambil satu koin dari B_j tak kosong ($j \leq 5$) dan tambahkan dua koin ke B_{j+1} . Operasi 2: ambil satu koin dari B_k tak kosong ($k \leq 4$) dan tukar isi B_{k+1} dan B_{k+2} . Mungkinkah setelah berhingga operasi $B_1, \dots, B_5$ kosong dan B_6 berisi tepat $2010^{2010^{2010}}$ koin?

Jawaban: Mungkin.

 **Arah penyelesaian.** Operasi 2 memungkinkan “pemangkatan”: dari $(a, 0, 0)$ pada tiga kotak berurutan dapat dicapai $(0, 2^a, 0)$, lalu dari empat kotak diperoleh menara pangkat 2 yang sangat besar. Karena target lebih kecil dari menara itu, operasi 2 juga dipakai untuk *membuang* koin (mengambil koin sambil menukar dua kotak kosong) sampai jumlahnya tepat.

SOAL 6 ALJABAR

Barisan bilangan real positif $a_1, a_2, \dots$ memenuhi: ada s sehingga $a_n = \max\{a_k + a_{n-k} : 1 \leq k \leq n-1\}$ untuk semua $n > s$. Buktikan ada $\ell \leq s$ dan N sehingga $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ untuk semua $n \geq N$.

 **Arah penyelesaian.** Tunjukkan setiap a_n adalah jumlah suku-suku a_i dengan $i \leq s$. Pilih ℓ yang memaksimumkan $\frac{a_\ell}{\ell}$; untuk n besar, representasi optimal selalu memuat a_ℓ karena “kelebihan” dari suku lain terbatas.

 **Pelajaran.** Soal 1 tahun ini diselesaikan sempurna, sedangkan Soal 5 hanya 6 poin. Soal kombinatorika konstruktif dengan bilangan raksasa menuntut keberanian bereksperimen dengan kasus kecil sebelum mencari pola umum.

IMO 2011

Amsterdam 2011: dua perak dan empat perunggu, peringkat 29 dengan 114 poin. Soal 2 adalah “soal kincir angin” yang terkenal, soal kombinatorika geometri yang tampak sederhana tetapi hanya menghasilkan 2 poin bagi tim. Soal 5 (teori bilangan) justru memberi 27 poin.

Tuan rumah Amsterdam, Belanda
 Partisipasi 101 negara
 Batas medali 28 / 22 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 29, total 114 poin
 2 perak  4 perunggu



SOAL 1 TEORI BILANGAN

Untuk himpunan $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ empat bilangan asli berbeda, misalkan s_A jumlahnya dan n_A banyak pasangan $i < j$ dengan $a_i + a_j \mid s_A$. Tentukan semua A dengan n_A terbesar.

Jawaban: $A = \{t, 5t, 7t, 11t\}$ dan $A = \{t, 11t, 19t, 29t\}$ untuk bilangan asli t , dengan $n_A = 4$.

 **Ide kunci.** Pasangan dengan jumlah lebih dari $\frac{s_A}{2}$ tidak dapat membagi s_A .

Solusi. Misalkan $a < b < c < d$ dan $s = a + b + c + d$. Pasangan berjumlah x dan pasangan komplementnya berjumlah $s - x$; jika $x > \frac{s}{2}$ maka $\frac{s}{x} \in (1, 2)$, jadi $x \nmid s$.

Pasangan $\{c, d\}$ dan $\{b, d\}$ berjumlah lebih dari $\frac{s}{2}$, sedangkan dari pasangan komplemen $\{a, d\}, \{b, c\}$ paling banyak satu yang lebih kecil dari $\frac{s}{2}$ kecuali keduanya sama dengan $\frac{s}{2}$. Jadi $n_A \leq 4$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $a + d = b + c = \frac{s}{2}$, $a + c \mid s$, dan $a + b \mid s$.

Langkah 1. $s = 2(b + c)$. Karena $a + c < b + c$ dan $b + c < 2c < 2(a + c)$, hasil bagi $\frac{2(b+c)}{a+c}$ terletak tegas di antara 2 dan 4, jadi sama dengan 3: $c = 2b - 3a$, dan $s = 6(b - a)$. Syarat $c > b$ berarti $b > 3a$.

Langkah 2. $a + b \mid 6(b - a)$ dengan hasil bagi q . Karena $a + b < a + c$, $q > 3$; karena $b - a < a + b$, $q < 6$. Jadi $q \in \{4, 5\}$. Untuk $q = 4$: $6b - 6a = 4a + 4b$, $b = 5a$, $c = 7a$, $d = b + c - a = 11a$. Untuk $q = 5$: $6b - 6a = 5a + 5b$, $b = 11a$, $c = 19a$, $d = 29a$.

Kesimpulan. Kedua keluarga memenuhi (misalnya $\{1, 5, 7, 11\}$): $s = 24$ habis dibagi 6, 8, 12, 24) dan $n_A = 4$ maksimum. ■

SOAL 2 KOMBINATORIKA / GEOMETRI

$\mathcal{S}$ himpunan berhingga paling sedikit dua titik, tidak ada tiga segaris. “Kincir angin” adalah garis ℓ melalui satu titik $P \in \mathcal{S}$ yang berputar searah jarum jam mengelilingi poros P ; ketika garis mengenai titik lain dari $\mathcal{S}$, titik itu menjadi poros baru. Buktikan P dan ℓ dapat dipilih sehingga setiap titik $\mathcal{S}$ menjadi poros tak hingga kali.

 **Ide kunci.** Pilih garis awal yang membagi titik-titik sama banyak di kedua sisi; banyak titik di setiap sisi invarian.

 **Arah penyelesaian.** Beri arah pada garis. Jika $|\mathcal{S}|$ ganjil, pilih ℓ melalui satu titik sehingga kedua sisi memuat $\frac{|\mathcal{S}|-1}{2}$ titik. Saat poros berganti, titik lama berpindah ke sisi yang sama dengan tempat titik baru berasal, sehingga banyak titik di setiap sisi invarian. Setelah garis berputar 180° , arahnya terbalik dan, dengan invarian itu, garis harus pernah melalui setiap titik. Untuk $|\mathcal{S}|$ genap pilih pembagian $\frac{n}{2}$ dan $\frac{n}{2} - 1$.

SOAL 3 ALJABAR

Fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi $f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$ untuk semua x, y . Buktikan $f(x) = 0$ untuk semua $x \leq 0$.

 **Arah penyelesaian.** Substitusi $y = t - x$ memberi $f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x))$, batas atas linear dalam t . Tunjukkan $f(x) \leq 0$ untuk semua x (jika $f(x) > 0$ maka f tak terbatas ke arah $+\infty$ yang bertentangan dengan batas lain), lalu pakai $f \leq 0$ bersama substitusi yang membuat $x + y \leq 0$ untuk menunjukkan $f(x) \geq 0$ pada $x \leq 0$.

SOAL 4 KOMBINATORIKA

Diberikan $n > 0$, sebuah neraca, dan n anak timbangan dengan berat $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Anak timbangan diletakkan satu per satu, masing-masing di piring kiri atau kanan, sehingga piring kanan tidak pernah lebih berat dari piring kiri. Tentukan banyak cara melakukannya.

Jawaban: $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$ (diperiksa dengan komputer untuk $n \leq 5$).

 **Arah penyelesaian.** Misalkan $f(n)$ jawabannya. Anak timbangan terberat mendominasi semua yang lain, jadi piring kiri harus memuat berat terbesar yang sudah diletakkan. Dengan menghapus anak timbangan 2^0 dari barisan yang sah dan membagi dua sisanya, diperoleh barisan sah untuk $n - 1$; sebaliknya 2^0 dapat disisipkan di $2n - 1$ cara (sebagai langkah pertama hanya di kiri, di posisi lain di kiri atau kanan). Jadi $f(n) = (2n - 1)f(n - 1)$.

SOAL 5 TEORIBILANGAN

Fungsi f dari bilangan bulat ke bilangan asli memenuhi: untuk semua m, n , $f(m - n) \mid f(m) - f(n)$. Buktikan bahwa jika $f(m) \leq f(n)$, maka $f(m) \mid f(n)$.

 **Arah penyelesaian.** Tunjukkan dulu $f(-n) = f(n)$ dan $f(n) \mid f(kn)$ untuk semua k . Lalu, jika $f(m) < f(n)$, pandang $d = f(n) - f(m)$ dan gunakan $f(n - m) \mid d$ bersama $f(n - m)$ dan $f(m)$ yang sama-sama membagi $f(n)$ atau selisihnya; batas ukuran memaksa $f(m) \mid f(n)$.

SOAL 6 GEOMETRI

ABC segitiga lancip dengan lingkaran luar Γ , dan ℓ garis singgung Γ . Garis ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c adalah pantulan ℓ terhadap BC, CA, AB . Buktikan lingkaran luar segitiga yang dibentuk ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c menyinggung Γ .

 **Arah penyelesaian.** Soal tersulit tahun itu. Solusi yang dikenal memakai bilangan kompleks dengan Γ sebagai lingkaran satuan, atau argumen sintetis dengan titik singgung ℓ , pantulannya, dan titik Miquel.

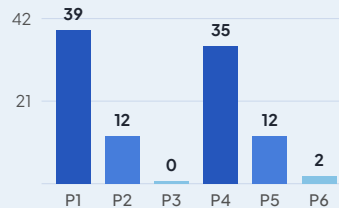
 **Pelajaran.** Perbedaan antara Soal 2 (2 poin) dan Soal 5 (27 poin) menunjukkan bahwa kombinatorika geometri dan invarian perlu porsi latihan yang jauh lebih besar. Ide invarian “banyak titik di setiap sisi garis” adalah contoh sempurna materi Bab 17.

IMO 2012

Mar del Plata 2012: satu perak, tiga perunggu, satu HM, peringkat 35 dengan 100 poin. Soal 2 (ketaksamaan) dapat diselesaikan dengan satu AM-GM yang cerdas, tetapi hanya menghasilkan 12 poin bagi tim, mengingat bahwa AM-GM “berbobot” dan pemecahan suku perlu dilatih.

Tuan rumah Mar del Plata, Argentina
 Partisipasi 100 negara
 Batas medali 28 / 21 / 14 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 35, total 100 poin

 1 perak  3 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 GEOMETRI

J pusat lingkaran singgung luar segitiga ABC di hadapan A , yang menyinggung BC di M dan garis AB, AC di K, L . Garis LM dan BJ bertemu di F ; garis KM dan CJ bertemu di G . Misalkan $S = AF \cap BC$ dan $T = AG \cap BC$. Buktikan M titik tengah ST .

 **Ide kunci.** $BJ \perp KM$ dan $CJ \perp LM$ (garis bagi luar tegak lurus tali busur singgung), sehingga F dan G adalah kaki tegak lurus yang memberi segitiga sama kaki.

 **Arah penyelesaian.** Karena $BK = BM$, garis BJ adalah sumbu KM ; demikian pula CJ sumbu LM . Kejar sudut untuk menunjukkan $\angle AFB = 90^\circ$, sehingga pada segitiga

AB garis BF adalah garis bagi sekaligus garis tinggi: $AB = BS$ dan F titik tengah AS . Serupa $AC = CT$. Maka $SM = SB + BM = AB + BK = AK$ dan $TM = AL$, dan $AK = AL$.

SOAL 2 ALJABAR

Misalkan $n \geq 3$ dan $a_2, \dots, a_n$ bilangan real positif dengan $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Buktikan $(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n$.

 **Ide kunci.** Pecah 1 menjadi $k - 1$ bagian agar AM-GM menghasilkan pangkat k .

Solusi. Untuk $k \geq 2$, AM-GM pada k bilangan $\frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{k-1}, a_k$ ($k - 1$ salinan pertama):

$$1 + a_k = (k - 1) \cdot \frac{1}{k-1} + a_k \geq k \sqrt[k]{\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}}, \quad \text{jadi} \quad (1 + a_k)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

Mengalikan untuk $k = 2, \dots, n$: ruas kanan teleskopik menjadi $\frac{n^n}{1^1} \cdot a_2 \cdots a_n = n^n$. Kesamaan memerlukan $a_k = \frac{1}{k-1}$ untuk semua k , tetapi maka $\prod a_k = \frac{1}{(n-1)!} \neq 1$ untuk $n \geq 3$. Jadi ketaksamaan tegas. ■

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Permainan tebak pembohong: A memilih x dan N dengan $1 \leq x \leq N$ dan memberitahukan N kepada B . B boleh bertanya “apakah $x \in S$?” untuk himpunan S apa pun; di antara setiap $k + 1$ jawaban berurutan paling sedikit satu jujur. Setelah selesai, B menyebut himpunan X berisi paling banyak n bilangan dan menang jika $x \in X$. Buktikan (1) jika $n \geq 2^k$, B dapat menjamin kemenangan; (2) untuk k cukup besar ada $n \geq 1,99^k$ sehingga B tidak dapat menjamin kemenangan.

 **Arah penyelesaian.** (1) Jika ada $2^k + 1$ kandidat, B dapat mengeliminasi satu kandidat dengan serangkaian pertanyaan berbasis representasi biner. (2) A memakai strategi “bobot” dengan fungsi potensial $\sum \lambda^{e_i}$ (e_i banyak jawaban bohong berturut-turut untuk kandidat i) yang tidak pernah turun di bawah ambang; ini salah satu soal kombinatorika tersulit dalam sejarah IMO.

SOAL 4 ALJABAR

Tentukan semua $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sehingga untuk semua bilangan bulat a, b, c dengan $a + b + c = 0$ berlaku $f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$.

Jawaban: Untuk konstanta bulat k : $f(x) = kx^2$; $f(x) = 0$ untuk x genap dan k untuk x ganjil; $f(x) = 0$ untuk $4 \mid x$, k untuk x ganjil, $4k$ untuk $x \equiv 2 \pmod{4}$.

⚡ **Arah penyelesaian.** $a = b = c = 0$ memberi $f(0) = 0$; $c = 0$, $b = -a$ memberi $f(-a) = f(a)$. Persamaan dengan $c = -(a+b)$ adalah persamaan kuadrat dalam $f(a+b)$ yang akarnya $(\sqrt{f(a)} \pm \sqrt{f(b)})^2$ (dalam arti yang tepat). Tentukan $f(2) \in \{0, 4f(1)\}$, lalu $f(3)$, $f(4)$, dan induksi pada kasus-kasus itu menghasilkan ketiga keluarga.

🔑 SOAL 5 GEOMETRI

Segitiga ABC siku-siku di C , dan D kaki garis tinggi dari C . Titik X di dalam ruas CD . K pada ruas AX dengan $BK = BC$, dan L pada ruas BX dengan $AL = AC$. Misalkan $M = AL \cap BK$. Buktikan $MK = ML$.

🔑 **Ide kunci.** $BK^2 = BC^2 = BD \cdot BA$, jadi BK menyinggung lingkaran AKD ; serupa AL menyinggung lingkaran BLD .

⚡ **Arah penyelesaian.** Misalkan ω_A lingkaran berpusat A berjari-jari AC (memuat L) dan ω_B berpusat B berjari-jari BC (memuat K). Kedua lingkaran melalui C dan sumbu radikalnya adalah garis CD , yang memuat X . Karena $AC^2 = AD \cdot AB$, kuasa A terhadap ω_B adalah $AB^2 - BC^2 = AC^2 = AL^2$; serupa kuasa B terhadap ω_A adalah BK^2 . Dengan kuasa titik X dan pengejaran sudut, tunjukkan bahwa ML dan MK adalah dua garis singgung dari M ke lingkaran yang sama, sehingga $MK = ML$.

🔑 SOAL 6 TEORIBILANGAN

Tentukan semua bilangan asli n sehingga ada bilangan bulat tak negatif $a_1, \dots, a_n$ dengan $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{a_i}} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{3^{a_i}} = 1$.

Jawaban: $n \equiv 1$ atau $2 \pmod{4}$ (diperiksa dengan komputer untuk $n \leq 6$).

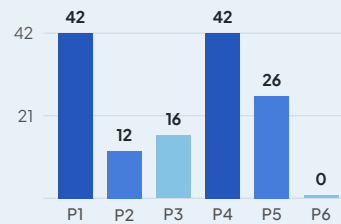
⚡ **Arah penyelesaian.** Syarat perlu: kalikan persamaan kedua dengan $3^{\max a_i}$ dan baca modulo 2; karena setiap 3^m ganjil, $\sum i \equiv 1 \pmod{2}$, yaitu $\frac{n(n+1)}{2}$ ganjil. Konstruksi induktif: dari solusi untuk n , ganti suku terakhir yang tepat dengan dua atau lebih suku agar kedua jumlah tetap 1, dan naikan n sebanyak 4.

🏆 **Pelajaran.** Soal 2 adalah contoh terbaik “pecah konstanta agar AM-GM tepat”. Teknik ini dibahas di Bab 1; skor 12 menunjukkan betapa pentingnya menebak kasus kesamaan sebelum memilih pembagian suku.

IMO 2013

Santa Marta 2013 adalah tonggak sejarah: emas IMO pertama Indonesia. Tim meraih satu emas, satu perak, empat perunggu, peringkat 19 dengan 138 poin. Tahun ini juga satu-satunya dalam dua dekade ketika Soal 3 menyumbang poin besar (16).

Tuan rumah Santa Marta, Kolombia
 Partisipasi 97 negara
 Batas medali 31 / 24 / 15 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 19, total 138 poin
 1 emas  1 perak  4 perunggu



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 TEORI BILANGAN

Buktikan bahwa untuk setiap pasangan bilangan asli k dan n ada k bilangan asli $m_1, \dots, m_k$ (tidak harus berbeda) sehingga $1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$.

 **Ide kunci.** Induksi pada k : satu faktor “memakan” satu bit, dengan pemisahan kasus paritas n .

Solusi. Untuk $k = 1$, ambil $m_1 = n$. Misalkan pernyataan benar untuk $k - 1$ (untuk semua n).

Kasus 1: $n = 2t$. $1 + \frac{2^k - 1}{2t} = \frac{2t + 2^k - 1}{2t} = \frac{2t + 2^{k-1}}{2t + 2^{k-2}} \cdot \frac{2t + 2^{k-2}}{2t} = \left(1 + \frac{1}{2t + 2^{k-2}}\right) \left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right)$.

Kasus 2: $n = 2t - 1$. $1 + \frac{2^k - 1}{2t - 1} = \frac{2t + 2^k - 2}{2t - 1} = \frac{2t + 2^k - 2}{2t} \cdot \frac{2t}{2t - 1} = \left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t - 1}\right)$.

Dalam kedua kasus faktor $1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}$ dapat ditulis sebagai hasil kali $k - 1$ faktor menurut hipotesis induksi, dan faktor lainnya berbentuk $1 + \frac{1}{m}$ dengan m bilangan asli. ■

SOAL 2 KOMBINATORIKA

Konfigurasi Kolombia terdiri atas 4027 titik (2013 merah, 2014 biru), tidak ada tiga segaris. Sejumlah garis (tidak melalui titik mana pun) membagi bidang; susunan disebut baik jika tidak ada daerah yang memuat titik dua warna. Tentukan k terkecil sehingga untuk setiap konfigurasi ada susunan baik dengan k garis.

Jawaban: $k = 2013$.

 **Arah penyelesaian.** Batas bawah: 4026 titik bergantian warna pada lingkaran ditambah satu titik biru lagi memerlukan 2013 garis (setiap garis memotong lingkaran di dua titik dan harus memisahkan 4026 pasangan bertetangga). Batas atas: pasangan titik merah dua-dua; untuk setiap pasangan dua garis sejajar dekat ruas penghubungnya memisahkannya dari semua titik lain; dengan memanfaatkan satu sisi selubung cembung, total 2013 garis cukup.

SOAL 3 GEOMETRI

Lingkaran singgung luar segitiga ABC di hadapan A menyinggung BC di A_1 ; B_1 dan C_1 didefinisikan serupa. Jika pusat lingkaran luar segitiga $A_1B_1C_1$ terletak pada lingkaran luar ABC , buktikan ABC siku-siku.

 **Arah penyelesaian.** Pusat lingkaran luar $A_1B_1C_1$ adalah titik X dengan $XA_1 = XB_1 = XC_1$; karena $BA_1 = AB_1 = s - c$ dan seterusnya, titik tengah busur-busur lingkaran luar memberi segitiga kongruen yang menempatkan X pada posisi istimewa. Pengejaran sudut menunjukkan salah satu sudut 90° .

SOAL 4 GEOMETRI

Segitiga lancip ABC bertitik tinggi H , dan W titik pada sisi BC . M dan N kaki garis tinggi dari B dan C . ω_1 lingkaran luar BWN dengan X titik diametral W , dan ω_2 lingkaran luar CWM dengan Y titik diametral W . Buktikan X, Y, H segaris.

 **Ide kunci.** Titik Miquel Z dari segitiga ABC dengan titik W, M, N .

⬆️ Arahan penyelesaian. Lingkaran ANM (berdiameter AH), BNW , dan CMW bertemu di titik Miquel Z . Karena WX dan WY diameter, $\angle WZX = \angle WZY = 90^\circ$, jadi X, Z, Y segaris. Tunjukkan A, Z, W segaris (pengejaran sudut) sehingga $\angle AZH = 90^\circ$ memberi H pada garis XY yang tegak lurus ZW .

🔑 SOAL 5 ALJABAR

$f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi $f(x)f(y) \geq f(xy)$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, dan ada rasional $a > 1$ dengan $f(a) = a$. Buktikan $f(x) = x$ untuk semua $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

⬆️ Arahan penyelesaian. Tunjukkan $f(n) \geq n$ untuk bilangan asli, lalu $f(x) \geq x$ untuk $x > 1$ rasional (memakai $f(x)^n \geq f(x^n) \geq \lfloor x^n \rfloor$). Dengan $f(a) = a$ dan kedua ketaksamaan, diperoleh $f(x) = x$ untuk bilangan asli, lalu untuk semua rasional.

🔑 SOAL 6 KOMBINATORIKA

Untuk $n \geq 3$, pelabelan $n+1$ titik berjarak sama pada lingkaran dengan $0, 1, \dots, n$ disebut indah jika untuk setiap $a < b < c < d$ dengan $a+d = b+c$, tali busur ad dan bc tidak berpotongan. Misalkan M banyak pelabelan indah (rotasi dianggap sama) dan N banyak pasangan terurut (x, y) bilangan asli dengan $x+y \leq n$ dan $\text{FPB}(x, y) = 1$. Buktikan $M = N + 1$.

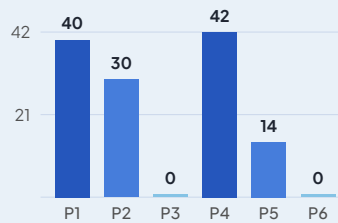
⬆️ Arahan penyelesaian. Induksi pada n dengan menghapus label n ; pelabelan indah untuk n diperoleh dari pelabelan untuk $n-1$ dengan menyisipkan n , dan banyak cara menyisipkan berhubungan dengan pasangan koprima (x, y) dengan $x+y = n$ (banyaknya $\varphi(n)$).

🏆 Pelajaran. Emas pertama Indonesia lahir pada tahun ketika tim mencetak poin di soal nomor 3. Kombinasi P1 dan P4 sempurna, P5 yang kuat, dan poin parsial di soal sulit adalah resep yang sama yang dijelaskan di awal buku.

IMO 2014

Cape Town 2014: dua perak, tiga perunggu, satu HM, peringkat 29 dengan 126 poin. Soal 2 menghasilkan 30 poin, tanda kemajuan di soal menengah, tetapi Soal 5 hanya 14.

Tuan rumah Cape Town, Afrika Selatan
 Partisipasi 101 negara
 Batas medali 29 / 22 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 29, total 126 poin
 2 perak  3 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 ALJABAR

Misalkan $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ barisan tak hingga bilangan asli. Buktikan ada tepat satu $n \geq 1$ sehingga $a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$.

 **Ide kunci.** Besaran $d_n = (a_0 + \dots + a_n) - na_n$ turun tegas.

Solusi. Syarat kiri setara dengan $d_n > 0$. Syarat kanan setara dengan $a_0 + \dots + a_n \leq na_{n+1}$, yaitu $(a_0 + \dots + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} \leq 0$, yaitu $d_{n+1} \leq 0$.

Klaim 1. $d_1 = a_0 > 0$ dan (d_n) turun tegas.

Bukti klaim. $d_{n+1} - d_n = a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} + na_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0$. □

Karena d_n bilangan bulat yang turun tegas mulai dari bilangan positif, ada tepat satu $n \geq 1$ dengan $d_n > 0 \geq d_{n+1}$. ■

SOAL 2 KOMBINATORIKA

Misalkan $n \geq 2$. Konfigurasi n benteng pada papan $n \times n$ disebut damai jika setiap baris dan kolom memuat tepat satu benteng. Tentukan k terbesar sehingga setiap konfigurasi damai memuat persegi $k \times k$ tanpa benteng.

Jawaban: $k = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$.

🕒 **Arah penyelesaian.** Batas bawah: jika $n > k^2$, pandang k kolom pertama dan baris-baris benteng di sana; di antara $k^2 + 1$ baris berurutan ada blok k baris yang tidak memuat benteng dari k kolom pertama, dan pergeseran blok memberi persegi kosong. Batas atas: untuk $n = k^2$ susun benteng dalam pola “tangga” $k \times k$ blok sehingga setiap persegi $k \times k$ memuat benteng.

SOAL 3 GEOMETRI

Segi empat konveks $ABCD$ dengan $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. H kaki tegak lurus dari A ke BD . Titik S pada AB dan T pada AD dengan H di dalam segitiga SCT dan $\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ$, $\angle THC - \angle DTC = 90^\circ$. Buktikan BD menyinggung lingkaran luar TSH .

🕒 **Arah penyelesaian.** Syarat sudut menunjukkan pusat lingkaran SHC terletak pada AB dan pusat lingkaran THC pada AD . Soal menjadi pernyataan bahwa garis bagi $\angle SHT$ tegak lurus BD ; solusi resmi memakai kesebangunan dan perbandingan jarak ke garis AC .

SOAL 4 GEOMETRI

Titik P, Q pada sisi BC segitiga lancip ABC memenuhi $\angle PAB = \angle BCA$ dan $\angle CAQ = \angle ABC$. Titik M, N pada AP, AQ dengan P titik tengah AM dan Q titik tengah AN . Buktikan BM dan CN berpotongan pada lingkaran luar ABC .

🔑 **Ide kunci.** Segitiga PBA, QAC , dan ABC sebangun, dan dari situ segitiga BPM dan NQC juga sebangun.

🕒 **Arah penyelesaian.** Dari $\angle PAB = \angle C$ dan $\angle CAQ = \angle B$, segitiga PBA dan QAC sebangun dengan ABC , dan $\angle APQ = \angle AQP$ sehingga $AP = AQ$. Maka $\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{PA} =$

$\frac{QA}{QC} = \frac{NQ}{QC}$, dan $\angle BPM = \angle NQC$, jadi segitiga BPM dan NQC sebangun. Maka $\angle BMP = \angle NCQ$, dan jika $X = BM \cap CN$, $\angle BXC = 180^\circ - \angle A$, sehingga X pada lingkaran luar.

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Untuk setiap bilangan asli n , Bank Cape Town menerbitkan koin bernilai $\frac{1}{n}$. Diberikan kumpulan berhingga koin seperti itu (tidak harus berbeda) dengan total paling banyak $99 + \frac{1}{2}$. Buktikan kumpulan itu dapat dibagi ke paling banyak 100 kelompok yang masing-masing bernilai total paling banyak 1.

 **Arah penyelesaian.** Sederhanakan dulu: dua koin $\frac{1}{2k}$ dapat digabung menjadi satu koin $\frac{1}{k}$, dan koin $\frac{1}{2k-1}$ sebanyak $2k-1$ dapat digabung menjadi 1. Setelah itu setiap nilai $\frac{1}{2k}$ muncul paling banyak sekali dan $\frac{1}{2k-1}$ paling banyak $2k-2$ kali. Isi 100 kelompok secara serakah menurut penyebut, dengan kelompok khusus untuk koin besar, dan tunjukkan totalnya cukup.

SOAL 6 KOMBINATORIKA

Himpunan garis berada dalam posisi umum jika tidak ada dua sejajar dan tidak ada tiga serentak. Buktikan bahwa untuk n cukup besar, pada setiap himpunan n garis dalam posisi umum, paling sedikit $\sqrt{n}$ garis dapat diwarnai biru sehingga tidak ada daerah berhingga yang seluruh batasnya biru.

 **Arah penyelesaian.** Warnai garis secara serakah: tambahkan garis ke himpunan biru selama tidak menutup daerah berhingga. Jika himpunan maksimal berukuran k , setiap garis lain terhalang oleh suatu daerah yang batasnya biru kecuali satu sisi; hitung banyak pasangan (titik potong biru, garis terhalang) untuk memperoleh $k^2 \geq n$.

 **Pelajaran.** Soal 1 dan 4 tahun ini hanya menuntut satu besaran bantu (d_n) dan satu pengamatan kesebangunan. Skor 40 dan 42 menunjukkan fondasi yang kokoh.

IMO 2015

Chiang Mai 2015: dua perak, empat perunggu, peringkat 29 dengan 100 poin. Soal 2 (teori bilangan) hanya menghasilkan 5 poin, padahal soal ini dapat diselesaikan dengan paritas dan penaksiran ukuran; batas emas tahun ini rendah (26).

Tuan rumah Chiang Mai, Thailand
 Partisipasi 104 negara
 Batas medali 26 / 19 / 14 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 29, total 100 poin
 2 perak  4 perunggu



SOAL 1 KOMBINATORIKA / GEOMETRI

Himpunan berhingga $\mathcal{S}$ titik di bidang disebut seimbang jika untuk setiap dua titik $A, B \in \mathcal{S}$ ada $C \in \mathcal{S}$ dengan $AC = BC$, dan bebas pusat jika untuk setiap tiga titik tidak ada $P \in \mathcal{S}$ dengan $PA = PB = PC$. (a) Tunjukkan untuk setiap $n \geq 3$ ada himpunan seimbang dengan n titik. (b) Tentukan semua $n \geq 3$ sehingga ada himpunan seimbang dan bebas pusat dengan n titik.

Jawaban: (b) semua n ganjil.

 **Arah penyelesaian.** (a) Untuk n ganjil, titik sudut segi- n beraturan. Untuk n genap, pusat O ditambah titik-titik pada lingkaran berpusat O yang dipilih sehingga setiap dua titik lingkaran yang “jauh” memiliki titik tengah busur di himpunan. (b) Untuk n

ganjil, segi- n beraturan bebas pusat. Untuk n genap, hitung pasangan $(\{A, B\}, C)$ dengan $CA = CB$: seimbang memberi paling sedikit $\binom{n}{2}$, bebas pusat memberi paling banyak $n \cdot \frac{n-1}{2}$ dengan kesamaan yang tidak mungkin untuk n genap.

SOAL 2 TEORI BILANGAN

Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga $ab - c$, $bc - a$, dan $ca - b$ masing-masing pangkat 2 (dengan $2^0 = 1$ termasuk).

Jawaban: $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$, $(3, 5, 7)$ dan permutasinya (diperiksa dengan komputer).

 **Arah penyelesaian.** Misalkan $a \leq b \leq c$. Jika $a = 1$, $b - c$ harus positif, mustahil kecuali kasus kecil. Kasus $a = 2$ ditangani dengan persamaan $2b - c = 2^x$, $2c - b = 2^z$. Untuk $a \geq 3$, paritas (semua ganjil, atau tepat satu genap) dan penaksiran ($ab - c \geq$ sepertiga $ca - b$) membatasi eksponen hingga tersisa $(3, 5, 7)$.

SOAL 3 GEOMETRI

Segitiga ABC dengan $AB > AC$ memiliki lingkaran luar Γ , titik tinggi H , kaki garis tinggi F dari A , dan M titik tengah BC . Q pada Γ dengan $\angle HQA = 90^\circ$ dan K pada Γ dengan $\angle HKQ = 90^\circ$. Buktikan lingkaran luar KQH dan FKM bersinggungan.

 **Arah penyelesaian.** Q adalah titik kedua pada garis $M-H$ (titik diametral A), karena $\angle HQA = 90^\circ$. Lingkaran KQH berdiameter QH . Solusi yang dikenal memakai inversi berpusat H atau pengejaran sudut untuk menunjukkan garis singgung di K pada kedua lingkaran sama.

SOAL 4 GEOMETRI

Segitiga ABC berlingkaran luar Ω dan pusat O . Lingkaran Γ berpusat A memotong BC di D, E (urutan B, D, E, C) dan Ω di F, G (urutan A, F, B, C, G). K titik potong kedua lingkaran luar BDF dengan AB , dan L titik potong kedua lingkaran luar CGE dengan CA . Jika FK dan GL berpotongan di X , buktikan X pada AO .

 **Idé kunci.** Simetri terhadap AO : karena $AF = AG$, F dan G simetris terhadap garis AO .

 **Arah penyelesaian.** Cukup tunjukkan $\angle AFK = \angle AGL$, karena dengan simetri $F \leftrightarrow G$ terhadap AO kedua garis bertemu pada sumbu simetri. Pengejaran sudut pada

lingkaran BDF , CGE , dan Ω , memakai $AD = AE = AF = AG$, memberi kesamaan sudut itu.

SOAL 5 ALJABAR

Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$ untuk semua bilangan real x, y .

Jawaban: $f(x) = x$ dan $f(x) = 2 - x$.

 **Arah penyelesaian.** $y = 1$ memberi $f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1)$: titik $x + f(x + 1)$ adalah titik tetap. $x = 0$: $f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0)$. Pisahkan kasus $f(0) = 0$ dan $f(0) \neq 0$; pada kasus kedua diperoleh $f(0) = 2$ dan $f(x) = 2 - x$; pada kasus pertama tunjukkan f ganjil lalu $f(x) = x$.

SOAL 6 KOMBINATORIKA / ALJABAR

Barisan bilangan bulat $a_1, a_2, \dots$ memenuhi $1 \leq a_j \leq 2015$ dan $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ untuk semua $k < \ell$. Buktikan ada bilangan bulat b dan N sehingga $|\sum_{j=m+1}^n (a_j - b)| \leq 1007^2$ untuk semua $n > m \geq N$.

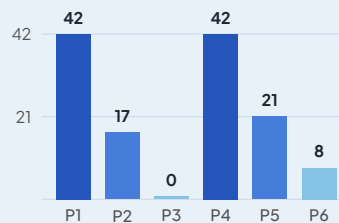
 **Arah penyelesaian.** Tafsirkan sebagai bola yang dilempar: pada waktu k bola dilempar setinggi a_k dan mendarat pada waktu $k + a_k$; syarat berarti tidak ada dua bola mendarat bersamaan. Banyak bola di udara akhirnya konstan b , dan jumlah $\sum (a_j - b)$ dikendalikan oleh posisi bola-bola di udara, dengan batas 1007^2 .

 **Pelajaran.** Soal 2 tahun ini adalah soal teori bilangan “nomor 2” yang khas: tidak ada teorema canggih, hanya paritas dan penaksiran. Latihan Bab 8 dan Bab 10 menyiapkan jenis soal ini.

IMO 2016

Hong Kong 2016: tiga perak dan tiga perunggu, peringkat 20 dengan 130 poin, salah satu hasil terbaik sebelum puncak 2018. Soal 1 dan 4 diselesaikan sempurna, dan Soal 6 bahkan memberi 8 poin.

Tuan rumah Hong Kong
 Partisipasi 109 negara
 Batas medali 29 / 22 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 20, total 130 poin
 3 perak  3 perunggu



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 GEOMETRI

Segitiga BCF siku-siku di B . A pada garis CF dengan $FA = FB$ dan F di antara A dan C . D dipilih dengan $DA = DC$ dan AC membagi dua $\angle DAB$; E dipilih dengan $EA = ED$ dan AD membagi dua $\angle EAC$. M titik tengah CF , dan X titik sehingga $AMXE$ jajaran genjang. Buktikan BD , FX , ME serentak.

➦ Arah penyelesaian. Misalkan $\angle FAB = \angle FBA = \theta$. Pengejaran sudut menunjukkan bahwa segitiga sama kaki FAB , DAC , dan EAD sebangun (sudut alas θ), dan bahwa $MB = MC = MF$ karena M titik tengah sisi miring segitiga siku-siku BCF . Solusi yang dikenal kemudian membuktikan beberapa kesejajaran dan kesamaan panjang yang menempatkan B, D, E, M, F, X dalam konfigurasi trapesium sama kaki, sehingga ketiga garis adalah garis-garis istimewa yang serentak. Pembahasan lengkapnya panjang.

SOAL 2 KOMBINATORIKA

Tentukan semua n sehingga setiap petak tabel $n \times n$ dapat diisi huruf I, M, O sehingga di setiap baris dan kolom sepertiga petak berisi masing-masing huruf, dan di setiap diagonal yang banyak petaknya kelipatan 3 juga sepertiga petaknya berisi masing-masing huruf.

Jawaban: Semua n kelipatan 9.

⚡ **Arah penyelesaian.** Konstruksi untuk $n = 9$ (dan diulang untuk $9k$) dengan pola blok 3×3 . Untuk syarat perlu, beri bobot pada petak menurut baris dan kolom modulo 3 dan hitung banyak huruf M di petak “tengah” dengan dua cara (baris, kolom, dan diagonal), sehingga n harus kelipatan 9.

SOAL 3 TEORI BILANGAN / GEOMETRI

$P = A_1 A_2 \dots A_k$ poligon konveks dengan titik sudut berkoordinat bulat pada satu lingkaran, dan S luasnya. Bilangan asli ganjil n memenuhi: kuadrat panjang setiap sisi adalah bilangan bulat yang habis dibagi n . Buktikan $2S$ bilangan bulat yang habis dibagi n .

⚡ **Arah penyelesaian.** $2S$ bulat menurut rumus tali sepatu. Cukup untuk $n = p^t$ prima. Triangulasi poligon; pada segitiga dengan sisi kuadrat a, b, c berlaku $16S^2 = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$ (Heron). Induksi pada k dengan memilih diagonal yang kuadrat panjangnya juga habis dibagi p^t (memakai teorema Ptolemy pada kuadrat).

SOAL 4 TEORI BILANGAN

Himpunan bilangan asli disebut harum jika memiliki paling sedikit dua unsur dan setiap unsurnya memiliki faktor prima persekutuan dengan paling sedikit satu unsur lain. Misalkan $P(n) = n^2 + n + 1$. Tentukan b terkecil sehingga ada bilangan bulat tak negatif a dengan $\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$ harum.

Jawaban: $b = 6$ (diperiksa dengan komputer; contoh terkecil $a = 195$).

⚡ **Arah penyelesaian.** Fakta kunci: $\text{FPB}(P(n), P(n+1)) = 1$; $\text{FPB}(P(n), P(n+2)) \in \{1, 7\}$, dengan 7 tepat ketika $n \equiv 2 \pmod{7}$; $\text{FPB}(P(n), P(n+3)) \in \{1, 3\}$, dengan 3 tepat ketika $n \equiv 1 \pmod{3}$; dan $\text{FPB}(P(n), P(n+4)) \in \{1, 19\}$. Untuk $b \leq 5$, suku-suku yang hanya dapat berbagi faktor lewat 7 atau 3 tidak dapat semuanya berpasangan (analisis kasus). Untuk $b = 6$, Teorema Sisa Cina memilih a yang membuat pasangan jarak 2, 3, dan 4 yang tepat berbagi faktor.

SOAL 5 ALJABAR

Persamaan $(x - 1)(x - 2) \cdots (x - 2016) = (x - 1)(x - 2) \cdots (x - 2016)$ ditulis di papan. Tentukan k terkecil sehingga dapat dihapus tepat k dari 4032 faktor linear itu, dengan paling sedikit satu faktor tersisa di setiap ruas, sehingga persamaan yang tersisa tidak memiliki penyelesaian real.

Jawaban: $k = 2016$.

 **Arah penyelesaian.** Batas bawah: setiap faktor $(x - i)$ harus hilang dari paling sedikit satu ruas, jika tidak $x = i$ adalah penyelesaian; jadi $k \geq 2016$. Konstruksi: ruas kiri memuat $(x - i)$ dengan $i \equiv 0$ atau $1 \pmod{4}$ dan ruas kanan dengan $i \equiv 2$ atau $3 \pmod{4}$; lalu buktikan persamaan $\prod (x - 4j + 3)(x - 4j) = \prod (x - 4j + 2)(x - 4j + 1)$ tidak memiliki akar real dengan membandingkan faktor-faktor berpasangan pada setiap selang.

SOAL 6 KOMBINATORIKA / GEOMETRI

Ada $n \geq 2$ ruas garis di bidang; setiap dua ruas berpotongan (di dalam), dan tidak ada tiga ruas melalui satu titik. Geoff memilih satu ujung setiap ruas dan menempatkan katak di sana menghadap ujung lainnya. Ia bertepuk $n - 1$ kali; setiap tepukan, setiap katak melompat ke titik potong berikutnya pada ruasnya. Geoff ingin agar tidak pernah dua katak berada di titik potong yang sama pada saat yang sama. (a) Buktikan keinginan itu dapat dipenuhi jika n ganjil. (b) Buktikan tidak dapat dipenuhi jika n genap.

 **Arah penyelesaian.** Perpanjang ruas menjadi tali busur sebuah lingkaran besar; $2n$ titik ujung terurut pada lingkaran, dan setiap tali busur memisahkan ujung-ujung lainnya sama banyak. (a) Pilih ujung secara bergantian mengelilingi lingkaran. (b) Untuk n genap, dua tali busur dengan ujung terpilih bertetangga pada lingkaran menyebabkan tabrakan karena paritas banyak titik potong yang harus dilewati sama.

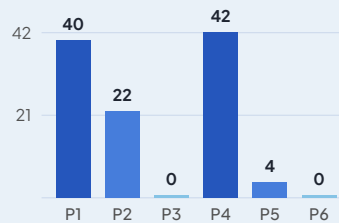
 **Pelajaran.** Delapan poin di Soal 6 menunjukkan manfaat mencoba soal tersulit dengan kasus kecil: bagian (a) soal ini dapat diakses dengan eksperimen, walaupun bagian (b) jauh lebih sulit. Inilah strategi poin parsial dari Bab 43.

IMO 2017

Rio de Janeiro menyajikan salah satu paket tersulit dekade ini. Batas emas hanya 25, terendah kedua dalam dua puluh tahun, tanda bahwa soal-soal menengah pun sulit bagi seluruh peserta dunia. Soal 3 (pemburu dan kelinci) tercatat sebagai salah satu soal dengan rata-rata terendah dalam sejarah IMO.

Tim Indonesia menyelesaikan Soal 1 dan Soal 4 dengan baik (40 dan 42 dari 42), tetapi hanya memperoleh 4 poin di Soal 5, sebuah soal kombinatorika yang ternyata dapat diselesaikan dengan induksi yang rapi. Tahun ini menunjukkan pola yang akan terus berulang: jarak menuju emas tidak terletak pada soal tersulit, melainkan pada soal menengah.

Tuan rumah Rio de Janeiro, Brasil
 Partisipasi 111 negara
 Batas medali 25 / 19 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 31, total 108 poin
 2 perak  3 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

Untuk setiap bilangan bulat $a_0 > 1$ didefinisikan barisan $a_0, a_1, a_2, \dots$ dengan

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{jika } \sqrt{a_n} \text{ bilangan bulat,} \\ a_n + 3, & \text{jika tidak.} \end{cases}$$

Tentukan semua a_0 sehingga ada bilangan A dengan $a_n = A$ untuk tak hingga banyak n .

Jawaban: semua a_0 kelipatan 3.

Q Ide kunci. Langkah +3 tidak mengubah sisa modulo 3, dan kuadrat tidak pernah bersisa 2 modulo 3. Lalu gunakan penurunan: setiap kali barisan mencapai kuadrat, nilainya turun drastis.

Solusi. Kasus $a_0 \equiv 2 \pmod{3}$. Suku yang bersisa 2 bukan kuadrat, sehingga suku berikutnya ditambah 3 dan tetap bersisa 2. Barisan naik tegas, tidak ada nilai yang berulang.

Lema penurunan. Misalkan $a_n = N$ dan s bilangan asli terkecil dengan $s^2 \geq N$ dan $s^2 \equiv N \pmod{3}$. Selama belum mencapai kuadrat, barisan melewati $N, N+3, N+6, \dots$, sehingga kuadrat pertama yang dicapai adalah s^2 , lalu suku berikutnya s .

Kasus $a_0 \equiv 0 \pmod{3}$. Semua suku kelipatan 3 (akar kuadrat kelipatan 9 adalah kelipatan 3). Jika $N > 9$, tulis $s = 3m$; maka $m \geq 2$ dan, menurut minimalitas s , $9(m-1)^2 < N$. Karena $3m \leq 9(m-1)^2$ untuk $m \geq 2$, diperoleh $s = 3m < N$. Jadi selama suku lebih dari 9, barisan akan mencapai suku yang lebih kecil. Akhirnya barisan masuk ke $\{3, 6, 9\}$ dan berputar $3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 3$. Nilai $A = 3$ muncul tak hingga kali.

Kasus $a_0 \equiv 1 \pmod{3}$. Suku $\equiv 1$ yang lebih dari 4 memenuhi $s < N$: di antara $s-1$ dan $s-2$ ada yang tidak habis dibagi 3 dan kuadratnya kurang dari N , sehingga $s < \sqrt{N} + 2 < N$. Jika suatu saat barisan mencapai suku $\equiv 2$, ia naik tegas selamanya. Jika tidak, penurunan membawa barisan ke suku $\equiv 1$ yang paling banyak 4, yaitu 4 (suku 1 tidak pernah muncul karena hanya 1 yang akarnya 1), lalu $4 \rightarrow 2$, yang bersisa 2. Dalam kedua kasus tidak ada nilai yang muncul tak hingga kali. ■

SOAL 2 ALJABAR

Tentukan semua fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk semua bilangan real x, y berlaku $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$.

Jawaban: $f \equiv 0$, $f(x) = x - 1$, dan $f(x) = 1 - x$.

 **Ide kunci.** Pilih x, y dengan $x + y = xy$ agar dua suku saling menghapus.

 **Arah penyelesaian.** Jika $f(0) = 0$, substitusi $y = 0$ memberi $f \equiv 0$. Andaikan $f(0) \neq 0$. Jika $f(a) = 0$ dengan $a \neq 1$, substitusi $x = a, y = \frac{a}{a-1}$ (sehingga $x + y = xy$) memberi $f(0) = 0$, kontradiksi; jadi f hanya bernilai nol di 1. Substitusi $x = y = 0$ memberi $f(f(0)^2) = 0$, sehingga $f(0)^2 = 1$. Karena $-f$ juga solusi bila f solusi, cukup tinjau $f(0) = -1, f(1) = 0$. Substitusi $y = 1$ memberi $f(x + 1) = f(x) + 1$. Langkah tersulit adalah membuktikan f injektif; setelah itu substitusi yang tepat memberi $f(x) = x - 1$. Pemeriksaan ketiga jawaban langsung.

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Seorang pemburu dan seekor kelinci tak terlihat bermain di bidang. Mula-mula keduanya di titik yang sama. Pada ronde ke- n : kelinci bergerak (tanpa terlihat) sejauh tepat 1; alat pelacak memberi tahu pemburu sebuah titik yang berjarak paling jauh 1 dari posisi kelinci; lalu pemburu bergerak (terlihat) sejauh tepat 1. Apakah pemburu selalu dapat menjamin bahwa setelah 10^9 ronde jaraknya ke kelinci paling jauh 100?

Jawaban: tidak.

 **Ide kunci.** Kelinci (bersama alat pelacak yang “menyesatkan”) menjaga dua kemungkinan lintasan yang simetris terhadap garis melalui pemburu.

 **Arah penyelesaian.** Jika jarak saat ini d , kelinci dapat bergerak sehingga selama sekitar 200 ronde laporan alat pelacak konsisten dengan dua lintasan kelinci yang simetris terhadap garis yang memuat pemburu dan posisi lama kelinci. Pemburu tidak dapat membedakan keduanya, sehingga paling tidak untuk salah satu lintasan kuadrat jaraknya bertambah sebesar suatu konstanta positif per blok ronde. Karena kuadrat jarak hanya perlu mencapai $10^4, 10^9$ ronde lebih dari cukup.

SOAL 4 GEOMETRI

Titik R dan S berbeda pada lingkaran Ω , dan RS bukan diameter. Garis ℓ menyinggung Ω di R . Titik T dipilih sehingga S titik tengah RT . Titik J pada busur pendek RS dipilih sehingga lingkaran luar Γ segitiga JST memotong ℓ di dua titik; A adalah titik potong yang lebih dekat ke R . Garis AJ memotong Ω lagi di K . Buktikan KT menyinggung Γ .

 **Ide kunci.** $KR \parallel AT$.

⬆ **Arah penyelesaian.** Karena A, J, S, T konsiklis dan K, J, A segaris, $\angle KJS = \angle ATS$; karena K, J, S, R konsiklis, $\angle KJS = \angle KRS$. Jadi $\angle KRS = \angle ATR$ dan $KR \parallel AT$. Pantulkan K terhadap S menjadi K' : karena S titik tengah RT , $RKTK'$ jajaran genjang dan K' terletak pada garis AT . Syarat singgung KT pada Γ (sudut singgung–tali busur) lalu direduksi menjadi pernyataan kuasa titik yang melibatkan A, R, S, K' , yang dibuktikan dengan kesebangunan dari $KR \parallel AT$.

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Diberikan bilangan bulat $N \geq 2$. Sebanyak $N(N + 1)$ pemain sepak bola dengan tinggi berbeda-beda berdiri berjajar. Sir Alex ingin mengeluarkan $N(N - 1)$ pemain sehingga tersisa $2N$ pemain yang memenuhi: tidak ada yang berdiri di antara dua pemain tertinggi, tidak ada yang berdiri di antara pemain tertinggi ketiga dan keempat, dan seterusnya, hingga tidak ada yang berdiri di antara dua pemain terpendek. Buktikan hal ini selalu mungkin.

🔍 **Ide kunci.** Bagi barisan menjadi blok-blok berurutan dan pilih pasangan dari blok yang “paling cepat” memuat dua pemain tinggi.

Solusi. Induksi pada N dengan pernyataan yang sedikit lebih umum: jika barisan dibagi menjadi N blok berurutan yang masing-masing berisi paling sedikit $N + 1$ pemain, pemilihan selalu mungkin. Untuk $N = 1$ pilih dua pemain dalam blok itu. Untuk langkah induksi, urutkan semua pemain dari tertinggi dan cari h terkecil sehingga ada blok yang memuat dua dari h pemain tertinggi. Karena ada N blok, $h \leq N + 1$. Dua pemain itu menjadi pasangan tertinggi; keluarkan semua pemain lain di blok tersebut dan semua pemain lain yang termasuk h pemain tertinggi. Menurut minimalitas h , setiap blok lain kehilangan paling banyak satu pemain, sehingga tersisa $N - 1$ blok dengan paling sedikit N pemain. Terapkan hipotesis induksi. Pasangan yang dipilih berada dalam blok sendiri, sehingga tidak ada pemain terpilih lain di antara keduanya, dan keduanya lebih tinggi daripada semua pemain yang tersisa. ■

SOAL 6 TEORI BILANGAN

Pasangan bilangan bulat (x, y) disebut primitif jika $\text{FPB}(x, y) = 1$. Diberikan himpunan berhingga S berisi pasangan primitif. Buktikan ada bilangan asli n dan bilangan bulat $a_0, a_1, \dots, a_n$ sehingga untuk setiap $(x, y) \in S$ berlaku $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n = 1$.

⬆ **Arah penyelesaian.** Induksi pada $|S|$. Untuk satu pasangan primitif, Bézout memberi bentuk linear bernilai 1. Untuk menambah pasangan baru, kalikan polinomial homogen

yang sudah ada dengan pangkat yang sesuai dan tambahkan kelipatan dari hasil kali bentuk linear $y_i x - x_i y$ (yang bernilai nol di pasangan lama). Masalahnya menjadi memilih koefisien agar nilai di pasangan baru tepat 1; di sini diperlukan Teorema Sisa Cina dan pemilihan pangkat yang cermat, karena faktor-faktor $y_i x - x_i y$ dapat memiliki pembagi persekutuan dengan bilangan yang harus dibalik.

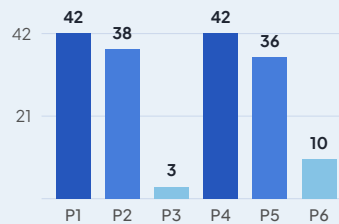
 **Pelajaran.** Soal 5 hanya menyumbang 4 poin bagi tim, padahal solusinya (induksi dengan blok berurutan) memakai gagasan yang sepenuhnya elementer. Soal kombinatorika konstruktif memerlukan latihan khusus: mencoba kasus kecil, merumuskan pernyataan induksi yang lebih kuat, dan menulis argumen “pilih yang ekstremal” dengan cermat. Di sisi lain, 22 poin di Soal 2 menunjukkan bahwa persamaan fungsional sudah menjadi kekuatan tim.

IMO 2018

Cluj-Napoca adalah tahun terbaik Indonesia dalam dua puluh tahun terakhir: peringkat 10 dunia, 171 poin, satu emas dan lima perak. Tidak ada peserta yang pulang tanpa medali.

Tabel skor menjelaskan mengapa. Soal 1 dan Soal 4 hampir sempurna seperti biasa, tetapi yang membedakan tahun ini adalah Soal 2 (38 poin) dan Soal 5 (36 poin): hampir setiap anggota tim menyelesaikan soal menengah secara penuh. Inilah model yang ingin direplikasi buku ini.

Tuan rumah Cluj-Napoca, Rumania
 Partisipasi 107 negara
 Batas medali 31 / 25 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 10, total 171 poin
 1 emas  5 perak



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 GEOMETRI

Γ lingkaran luar segitiga lancip ABC . Titik D dan E pada ruas AB dan AC dengan $AD = AE$. Sumbu BD dan sumbu CE memotong busur pendek AB dan AC dari Γ di F dan G . Buktikan DE dan FG sejajar (atau berimpit).

 **Ide kunci.** Misalkan FD memotong Γ lagi di X . Maka $AX = AD$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Karena $FB = FD$, $\angle FDB = \angle FBD = \angle FBA = \angle FXA$ (sudut keliling). Sudut $\angle FDB$ bertolak belakang dengan $\angle XDA$, sehingga segitiga ADX sama kaki: $AX = AD$. Dengan cara sama, jika GE memotong Γ lagi di Y , maka $AY = AE$. Jadi D, E, X, Y terletak pada lingkaran berpusat A . Kejar sudut pada lingkaran ini dan pada Γ untuk memperoleh $\angle(DE, XY) = \angle(FG, XY)$.

SOAL 2 ALJABAR

Tentukan semua bilangan bulat $n \geq 3$ sehingga ada bilangan real $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ dengan $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$, dan $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Jawaban: semua n kelipatan 3.

🔍 **Ide kunci.** Kalikan rekurensi yang digeser dengan a_i dan jumlahkan secara siklis.

Solusi. Pandang indeks modulo n . Dari $a_{i+3} = a_{i+1}a_{i+2} + 1$,

$$a_i a_{i+3} = a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_i = (a_{i+2} - 1)a_{i+2} + a_i = a_{i+2}^2 - a_{i+2} + a_i.$$

Menjumlahkan untuk semua i memberi $\sum a_i a_{i+3} = \sum a_i^2$, sehingga $\sum (a_i - a_{i+3})^2 = 2 \sum a_i^2 - 2 \sum a_i a_{i+3} = 0$. Jadi $a_i = a_{i+3}$ untuk semua i . Jika $3 \nmid n$, maka $\text{FPB}(3, n) = 1$ dan semua suku sama dengan suatu a , sehingga $a^2 + 1 = a$, yang tidak memiliki akar real. Jadi $3 \mid n$. Sebaliknya, barisan periodik $-1, -1, 2, -1, -1, 2, \dots$ memenuhi: $(-1)(-1) + 1 = 2$, $(-1) \cdot 2 + 1 = -1$, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$. ■

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Segitiga anti-Pascal adalah susunan bilangan berbentuk segitiga sama sisi sehingga setiap bilangan, kecuali di baris terbawah, sama dengan nilai mutlak selisih dua bilangan tepat di bawahnya. Apakah ada segitiga anti-Pascal dengan 2018 baris yang memuat setiap bilangan bulat dari 1 sampai $1 + 2 + \dots + 2018$ tepat sekali?

Jawaban: tidak ada.

⚡ **Arah penyelesaian.** Telusuri lintasan dari puncak ke bawah: setiap bilangan adalah selisih dua bilangan di bawahnya, jadi bilangan yang lebih besar di bawahnya paling sedikit jumlah bilangan di atasnya dengan bilangan pasangannya. Pilih lintasan yang selalu turun ke bilangan yang lebih besar; bilangan-bilangan “pasangan” di sepanjang lintasan berbeda-beda, sehingga bilangan di ujung lintasan paling sedikit $1 + 2 + \dots + 2018$, yaitu bilangan terbesar. Terapkan argumen serupa pada segitiga-segitiga kecil yang tersisa di kiri dan kanan lintasan untuk memperoleh kontradiksi ukuran.

SOAL 4 KOMBINATORIKA

Sebuah *situs* adalah titik (x, y) dengan $x, y \in \{1, 2, \dots, 20\}$. Amy dan Ben bergantian meletakkan batu pada situs kosong, Amy lebih dulu. Amy meletakkan batu merah sehingga jarak dua batu merah tidak pernah $\sqrt{5}$. Ben meletakkan batu biru di situs kosong mana pun. Permainan berhenti jika seorang pemain tidak dapat melangkah. Tentukan K terbesar sehingga Amy dapat menjamin paling sedikit K batu merah.

Jawaban: $K = 100$.

 **Ide kunci.** Paritas $x + y$ untuk Amy; siklus lompatan kuda 4 titik untuk Ben.

Solusi. Amy dapat memperoleh 100. Jarak $\sqrt{5}$ berarti selisih koordinat $(1, 2)$ atau $(2, 1)$, yang mengubah paritas $x + y$. Amy hanya memakai 200 situs dengan $x + y$ genap; dua situs seperti itu tidak pernah berjarak $\sqrt{5}$. Setiap ronde menghabiskan paling banyak dua situs genap (satu oleh Amy, paling banyak satu oleh Ben), sehingga Amy dapat melangkah paling sedikit 100 kali.

Ben dapat membatasi Amy pada 100. Bagi papan menjadi 25 blok 4×4 . Dengan koordinat $0-3$ di dalam blok, 16 situs terbagi menjadi empat siklus yang titik-titik berurutannya berjarak $\sqrt{5}$:

$$\begin{array}{ll} (0, 0), (1, 2), (3, 3), (2, 1); & (0, 3), (2, 2), (3, 0), (1, 1); \\ (0, 1), (2, 0), (3, 2), (1, 3); & (0, 2), (1, 0), (3, 1), (2, 3). \end{array}$$

Setiap kali Amy meletakkan batu pada suatu siklus, Ben meletakkan batu pada titik yang berseberangan di siklus itu. Dua titik sisanya bertetangga (berjarak $\sqrt{5}$) dengan batu Amy, sehingga Amy memperoleh paling banyak satu batu per siklus: paling banyak 100 batu. ■

SOAL 5 TEORIBILANGAN

Barisan bilangan asli $a_1, a_2, \dots$ memenuhi: ada $N > 1$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ bilangan $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ bulat. Buktikan ada M sehingga $a_m = a_{m+1}$ untuk semua $m \geq M$.

 **Ide kunci.** Kurangkan dua jumlah berurutan: $\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ bulat, sehingga $a_{n+1} \mid a_1 a_n$.

 **Arah penyelesaian.** Untuk prima $p \nmid a_1$, hubungan di atas memberi $v_p(a_{n+1}) \leq v_p(a_n)$. Untuk prima $p \mid a_1$, analisis v_p yang lebih teliti menunjukkan $v_p(a_n)$ akhirnya

juga tidak naik. Maka $a_{n+1} \mid a_n$ untuk n besar, sehingga barisan bilangan asli itu akhirnya tidak naik, dan akhirnya konstan.

SOAL 6 GEOMETRI

Segi empat konveks $ABCD$ memenuhi $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Titik X di dalam $ABCD$ memenuhi $\angle XAB = \angle XCD$ dan $\angle XBC = \angle XDA$. Buktikan $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

 **Arah penyelesaian.** Soal tersulit tahun ini. Pembahasan yang dikenal memakai inversi berpusat X (atau konstruksi segitiga dengan sisi $AB \cdot CD$, $BC \cdot DA$, $AC \cdot BD$), sehingga syarat perkalian sisi berubah menjadi syarat kesamaan panjang dan syarat sudut menjadi syarat kesebangunan.

 **Pelajaran.** Rumus keberhasilan 2018 sederhana: 84 poin dari Soal 1 dan 4, ditambah 74 poin dari Soal 2 dan 5. Kedua soal menengah itu, rekurensi siklis dan barisan dengan jumlah bulat, memakai teknik yang ada di Bab 4 dan Bab 6. Tahun ini adalah bukti bahwa tim Indonesia *mampu* menguasai soal menengah secara kolektif; tantangannya adalah melakukannya setiap tahun.

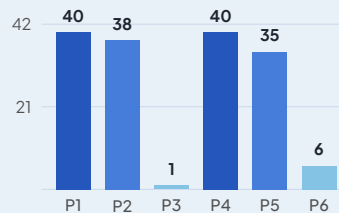
 BAB 35

IMO 2019

Bath 2019 melanjutkan momentum: peringkat 14, 160 poin, satu emas, empat perak, dan satu perunggu. Seperti 2018, keberhasilan datang dari soal menengah: 38 poin di Soal 2 dan 35 poin di Soal 5.

Paket tahun ini seimbang. Soal 1 adalah persamaan fungsional yang ramah, Soal 4 memadukan faktorial dan pangkat 2, dan Soal 5 (koin Harry) adalah kombinatorika yang elegan dengan jawaban rata-rata $\frac{n(n+1)}{4}$.

Tuan rumah Bath, Inggris
 Partisipasi 112 negara
 Batas medali 31 / 24 / 17 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 14, total 160 poin
 1 emas  4 perak  1 perunggu



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

 SOAL 1 ALJABAR

Tentukan semua fungsi $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sehingga untuk semua bilangan bulat a, b berlaku $f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$.

Jawaban: $f \equiv 0$ dan $f(x) = 2x + c$ untuk sembarang konstanta bulat c .

 **Ide kunci.** Substitusi $a = 0$ menyederhanakan ruas kanan; lalu bandingkan (a, b) dengan (a', b') yang jumlahnya sama.

Solusi. Substitusi $a = 0$: $f(f(b)) = 2f(b) + f(0)$. Jadi persamaan menjadi $f(2a) + 2f(b) = 2f(a + b) + f(0)$. Substitusi $a = 1, b = n$:

$$f(2) + 2f(n) = 2f(n + 1) + f(0), \quad \text{yaitu} \quad f(n + 1) - f(n) = \frac{f(2) - f(0)}{2} =: m.$$

Selisih berurutan konstan, sehingga $f(n) = mn + c$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$. Substitusikan ke persamaan awal: $2ma + c + 2(mb + c) = m(m(a + b) + c) + c$, yaitu $2m(a + b) + 3c = m^2(a + b) + mc + c$ untuk semua a, b . Maka $m^2 = 2m$ dan $2c = mc$. Jika $m = 0$ maka $c = 0$; jika $m = 2$, c bebas. Kedua keluarga memenuhi persamaan. ■

SOAL 2 GEOMETRI

Pada segitiga ABC , titik A_1 pada BC dan B_1 pada AC . Titik P dan Q pada ruas AA_1 dan BB_1 dengan $PQ \parallel AB$. Titik P_1 pada garis PB_1 sehingga B_1 terletak di antara P dan P_1 dan $\angle PP_1C = \angle BAC$. Titik Q_1 pada garis QA_1 sehingga A_1 terletak di antara Q dan Q_1 dan $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Buktikan P, Q, P_1, Q_1 konsiklis.

 **Ide kunci.** Perpanjang AA_1 dan BB_1 hingga memotong lingkaran luar ABC di A_2 dan B_2 .

 **Arah penyelesaian.** Karena $PQ \parallel AB$, teorema Reim memberi P, Q, A_2, B_2 konsiklis; sebut lingkarannya ω . Syarat $\angle PP_1C = \angle BAC = \angle BA_2C$ menunjukkan P_1 terletak pada lingkaran CB_1A_2 ; kejar sudut untuk membuktikan $P_1 \in \omega$. Dengan cara sama $Q_1 \in \omega$.

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Sebuah jejaring sosial memiliki 2019 pengguna. Sebuah *peristiwa* terjadi pada tiga pengguna A, B, C dengan A berteman dengan B dan C tetapi B dan C tidak berteman: B dan C menjadi berteman, sedangkan A tidak lagi berteman dengan B maupun C . Mula-mula 1010 pengguna masing-masing memiliki 1009 teman dan 1009 pengguna masing-masing memiliki 1010 teman. Buktikan ada rangkaian peristiwa sehingga akhirnya setiap pengguna memiliki paling banyak satu teman.

 **Arah penyelesaian.** Setiap peristiwa mengurangi banyak sisi graf sebesar 1 dan mempertahankan paritas derajat setiap titik. Tunjukkan bahwa selama graf terhubung dan bukan graf lengkap, selalu ada peristiwa yang mempertahankan keterhubungan; lakukan hingga graf menjadi pohon atau hampir pohon, lalu kurangi terus hingga tersisa pasangan-pasangan terpisah. Syarat derajat awal menjamin graf awal terhubung dan bukan graf lengkap.

SOAL 4 TEORI BILANGAN

Tentukan semua pasangan bilangan asli (k, n) dengan $k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$.

Jawaban: $(k, n) = (1, 1)$ dan $(3, 2)$.

 **Ide kunci.** Bandingkan pangkat 2 di kedua ruas, lalu ukuran.

 **Arah penyelesaian.** Ruas kanan memiliki $v_2 = 0 + 1 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Karena $v_2(k!) < k$, diperoleh $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Di sisi lain ruas kanan kurang dari 2^{n^2} . Untuk $n \geq 6$, $k! \geq \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)!$ jauh melebihi 2^{n^2} (untuk $n = 6$: $16! > 2^{36}$, dan selisihnya membesar). Sisa kasus $n \leq 5$ diperiksa langsung: $n = 1$ memberi $1 = 1!$, $n = 2$ memberi $3 \cdot 2 = 3!$, sedangkan $n = 3, 4, 5$ memberi 168, 20160, dan 9 999 360, yang bukan faktorial.

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Harry memiliki n koin berjajar, masing-masing menunjukkan H atau T. Selama ada koin H, jika tepat $k > 0$ koin menunjukkan H, Harry membalik koin ke- k dari kiri. Buktikan proses selalu berhenti, dan tentukan rata-rata banyak langkah $L(C)$ atas semua 2^n konfigurasi awal C .

Jawaban: $\frac{n(n+1)}{4}$.

 **Ide kunci.** Induksi dengan memperhatikan koin paling kanan.

 **Arah penyelesaian.** Jika koin ke- n adalah T, koin itu tidak pernah disentuh, sehingga prosesnya sama dengan proses pada $n - 1$ koin pertama. Jika koin ke- n adalah H, proses berjalan pada $n - 1$ koin pertama (dengan k bergeser satu) sampai semua koin kecuali yang terakhir menjadi T, lalu koin terakhir dibalik; analisis ini memberi rekurensi $E_n = E_{n-1} + \frac{n}{2}$ untuk rata-rata E_n , sehingga $E_n = \frac{n(n+1)}{4}$.

SOAL 6 GEOMETRI

Segitiga lancip ABC dengan $AB \neq AC$ memiliki pusat lingkaran dalam I dan lingkaran dalam ω yang menyinggung BC, CA, AB di D, E, F . Garis melalui D yang tegak lurus EF memotong ω lagi di R . Garis AR memotong ω lagi di P . Lingkaran luar PCE dan PBF berpotongan lagi di Q . Buktikan garis DI dan PQ berpotongan pada garis melalui A yang tegak lurus AI .

 **Arah penyelesaian.** Soal ini panjang. Pendekatan yang umum: bilangan kompleks dengan ω sebagai lingkaran satuan (titik singgung d, e, f sebagai variabel), atau argumen sintetis melalui sumbu radikal lingkaran PCE, PBF , dan ω .

 **Pelajaran.** Dua tahun berturut-turut (2018 dan 2019) menunjukkan konsistensi yang sama: P2+P5 di atas 70 poin tim. Soal 1 tahun ini hanya memerlukan dua substitusi dan argumen “selisih konstan” dari Bab 3; soal seperti ini harus menjadi 7 poin yang pasti. Kehilangan beberapa poin di Soal 1 dan 4 (40 dan 40) mengingatkan bahwa kerapian penulisan tetap penting bahkan pada soal termudah.

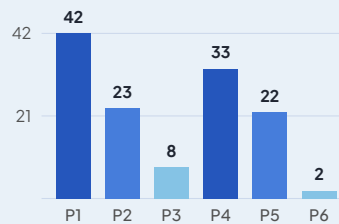
 BAB 36

IMO 2020

IMO 2020 berlangsung daring akibat pandemi, dan Indonesia meraih dua emas, pencapaian yang tidak terulang sejak itu. Namun peringkat tim turun ke 32 dengan 130 poin: distribusi skor antaranggota tim sangat tidak merata.

Soal 1 geometri ternyata runtuh oleh satu pengamatan (pusat lingkaran luar PAB), Soal 2 oleh AM-GM berbobot, dan Soal 3 oleh sirkuit Euler. Ketiga soal Hari 1 dapat diselesaikan penuh dengan materi buku ini, tetapi skor tim di Soal 2 hanya 23 dan di Soal 3 hanya 8.

Tuan rumah Rusia (daring)
 Partisipasi 105 negara
 Batas medali 31 / 24 / 15 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 32, total 130 poin
 2 emas  2 perunggu  2 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 GEOMETRI

Pada segi empat konveks $ABCD$, titik P di dalamnya memenuhi $\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$. Buktikan bahwa garis bagi dalam $\angle ADP$, garis bagi dalam $\angle PCB$, dan sumbu ruas AB bertemu di satu titik.

 **Ide kunci.** Pusat lingkaran luar O segitiga PAB .

Solusi. Misalkan $\angle PAD = \alpha$, sehingga $\angle PBA = 2\alpha$ dan $\angle DPA = 3\alpha$; maka $\angle ADP = 180^\circ - 4\alpha$. Sudut pusat $\angle AOP = 2\angle ABP = 4\alpha$, sehingga $\angle AOP + \angle ADP = 180^\circ$ dan A, O, P, D konsiklis. Karena $OA = OP$, O adalah titik tengah busur AP dari lingkaran itu, sehingga DO membagi dua $\angle ADP$. Dengan cara sama (sudut $\beta = \angle CBP$) diperoleh B, O, P, C konsiklis dan CO membagi dua $\angle PCB$. Titik O juga terletak pada sumbu AB . ■

SOAL 2 ALJABAR

Bilangan real $a \geq b \geq c \geq d > 0$ memenuhi $a + b + c + d = 1$. Buktikan $(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Ide kunci. AM-GM berbobot dengan bobot a, b, c, d .

Solusi. Dengan AM-GM berbobot (bobot a, b, c, d berjumlah 1): $a^a b^b c^c d^d \leq a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Cukup dibuktikan $(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^3$. Dengan urutan $a \geq b \geq c \geq d$:

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c + 4d &\leq a + 3b + 3c + 3d && (\text{setara } d \leq b), \\ a + 2b + 3c + 4d &\leq 3a + b + 3c + 3d && (\text{setara } b + d \leq 2a), \\ a + 2b + 3c + 4d &\leq 3a + 3b + c + 3d && (\text{setara } 2c + d \leq 2a + b), \\ a + 2b + 3c + 4d &\leq 3a + 3b + 3c + d && (\text{setara } 3d \leq 2a + b). \end{aligned}$$

Kalikan baris-baris ini dengan a^2, b^2, c^2, d^2 lalu jumlahkan:

$$(a + 2b + 3c + 4d) \sum a^2 \leq \sum a^3 + 3 \sum_{x \neq y} x^2 y = (a + b + c + d)^3 - 6(abc + abd + acd + bcd) < 1. \quad \blacksquare$$

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Ada $4n$ kerikil dengan berat $1, 2, \dots, 4n$. Setiap kerikil diwarnai dengan salah satu dari n warna, masing-masing warna tepat empat kerikil. Buktikan kerikil dapat dibagi menjadi dua tumpukan dengan berat total sama dan setiap tumpukan memuat tepat dua kerikil dari setiap warna.

Ide kunci. Pasangkan i dengan $4n + 1 - i$, lalu gunakan sirkuit Euler.

Solusi. Bentuk $2n$ pasangan $\{i, 4n + 1 - i\}$, masing-masing berjumlah $4n + 1$. Buat multigraf dengan titik = warna dan satu sisi untuk setiap pasangan, yang menghubungkan warna kedua kerikilnya (boleh berupa gelang). Setiap titik berderajat 4. Setiap

komponen memiliki sirkuit Euler (Bab 18) dengan banyak sisi $2 \cdot$ (banyak titik), yang genap. Warnai sisi-sisi sepanjang sirkuit secara bergantian merah dan biru. Setiap kali sirkuit melewati sebuah titik, sisi masuk dan sisi keluarnya berbeda warna, sehingga setiap titik memiliki dua ujung sisi merah dan dua ujung sisi biru. Tumpukan pertama berisi kerikil dari pasangan-pasangan merah, tumpukan kedua dari pasangan biru. Masing-masing berisi n pasangan, jadi beratnya $n(4n + 1)$, dan setiap warna memiliki tepat dua kerikil di setiap tumpukan. ■

SOAL 4 KOMBINATORIKA

Diberikan $n > 1$. Ada n^2 stasiun di lereng gunung pada ketinggian berbeda. Dua perusahaan kereta gantung A dan B masing-masing mengoperasikan k kereta; setiap kereta berjalan dari suatu stasiun ke stasiun yang lebih tinggi. Untuk setiap perusahaan, k kereta itu memiliki k titik awal berbeda dan k titik akhir berbeda, dan kereta yang berangkat lebih tinggi juga berakhir lebih tinggi. Dua stasiun *terhubung* oleh suatu perusahaan jika dapat ditempuh dari yang lebih rendah ke yang lebih tinggi dengan satu atau lebih kereta perusahaan itu. Tentukan k terkecil yang menjamin ada dua stasiun yang terhubung oleh kedua perusahaan.

Jawaban: $k = n^2 - n + 1$.

 **Arah penyelesaian.** Contoh untuk $k = n^2 - n$: beri nomor stasiun $1, \dots, n^2$ dari bawah. Perusahaan A memakai kereta $i \rightarrow i + 1$ untuk i yang bukan kelipatan n (menghubungkan stasiun dalam blok n stasiun berurutan), dan B memakai kereta $i \rightarrow i + n$ untuk $i \leq n^2 - n$ (menghubungkan stasiun yang kongruen modulo n). Dua stasiun yang terhubung oleh keduanya harus satu blok dan satu kelas sisa, jadi sama. *Batas atas:* kereta suatu perusahaan membentuk lintasan-lintasan terpisah; dengan k kereta ada tepat $n^2 - k$ lintasan (komponen). Untuk $k = n^2 - n + 1$, masing-masing perusahaan memiliki $n - 1$ komponen. Pasangan (komponen A , komponen B) hanya ada $(n - 1)^2 < n^2$ kemungkinan, sehingga dua stasiun berada di komponen yang sama untuk kedua perusahaan; dalam satu komponen (lintasan yang naik) dua stasiun selalu terhubung.

SOAL 5 TEORI BILANGAN

Setumpuk $n > 1$ kartu masing-masing bertuliskan bilangan asli. Untuk setiap dua kartu, rata-rata aritmetika bilangan pada keduanya sama dengan rata-rata geometrik bilangan pada suatu kumpulan satu atau lebih kartu. Untuk n berapa saja dapat disimpulkan bahwa semua bilangan pada kartu sama?

Jawaban: untuk semua $n > 1$.

 **Arah penyelesaian.** Andaikan tidak semuanya sama; bagi dengan FPB-nya. Ambil prima p yang membagi sebagian tetapi tidak semua bilangan, atau gunakan bilangan terbesar dan terkecil. Rata-rata aritmetika dua bilangan yang dipilih secara tepat memiliki valuasi p -adik yang tidak dapat dicapai oleh rata-rata geometrik mana pun, karena rata-rata geometrik memiliki valuasi berupa rata-rata valuasi.

 SOAL 6 KOMBINATORIKA / GEOMETRI

Buktikan ada konstanta $c > 0$ sehingga untuk setiap $n > 1$ dan setiap himpunan S berisi n titik di bidang yang jarak setiap dua titiknya paling sedikit 1, ada garis ℓ yang memisahkan S (kedua sisi tak kosong) dan setiap titik S berjarak paling sedikit $cn^{-1/3}$ dari ℓ .

 **Arah penyelesaian.** Pilih arah garis secara acak (atau berdasarkan diameter himpunan) dan hitung “lebar” proyeksi titik-titik ke arah tegak lurus. Jika proyeksi terlalu padat, titik-titik harus padat di suatu jalur sempit, yang bertentangan dengan jarak minimum 1. Keseimbangan kedua argumen menghasilkan pangkat $n^{-1/3}$.

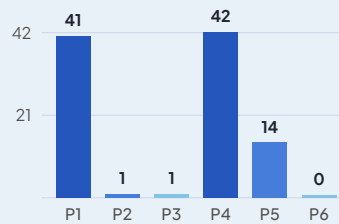
 **Pelajaran.** Dua emas menunjukkan bahwa peserta terbaik Indonesia dapat bersaing di level tertinggi, tetapi peringkat 32 menunjukkan jurang di dalam tim. Program pembinaan harus menaikkan *lantai* tim, bukan hanya *atap*-nya. Soal 2 adalah pelajaran berharga: AM-GM berbobot (Bab 1) menyelesaikan separuh soal dalam satu baris, dan separuh sisanya hanyalah membandingkan koefisien dengan cermat.

IMO 2021

IMO 2021 kembali daring, dengan paket yang sangat keras. Batas emas hanya 24, terendah dalam dua puluh tahun, dan batas perunggu 12.

Tim Indonesia memperoleh dua perak dan empat perunggu, tetapi skor per soal mengungkap masalah: 1 poin di Soal 2 (ketaksamaan akar kuadrat) dan 1 poin di Soal 3. Dengan Soal 5 hanya 14 poin, total tim 99, terendah kedua dalam dekade ini.

Tuan rumah Rusia (daring)
 Partisipasi 107 negara
 Batas medali 24 / 19 / 12 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 33, total 99 poin
 **2** perak  **4** perunggu



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 TEORI BILANGAN

Misalkan $n \geq 100$. Ivan menulis bilangan $n, n + 1, \dots, 2n$ masing-masing pada satu kartu, lalu membagi $n + 1$ kartu itu menjadi dua tumpukan. Buktikan paling sedikit satu tumpukan memuat dua kartu yang jumlahnya kuadrat sempurna.

 **Ide kunci.** Cari tiga bilangan dalam rentang yang jumlah setiap dua di antaranya kuadrat.

Solusi. Untuk bilangan asli k , pandang $a = 2k^2 - 4k$, $b = 2k^2 + 1$, $c = 2k^2 + 4k$. Maka $a + b = (2k - 1)^2$, $b + c = (2k + 1)^2$, $a + c = (2k)^2$. Jika ketiganya terletak di $[n, 2n]$, dua di antaranya berada di tumpukan yang sama. Syaratnya $a \geq n$ dan $c \leq 2n$, yaitu

$$k^2 + 2k \leq n \leq 2k^2 - 4k.$$

Selang $I_k = [k^2 + 2k, 2k^2 - 4k]$ untuk $k = 9, 10, 11, \dots$ adalah $[99, 126]$, $[120, 160]$, $[143, 198]$, dan seterusnya. Selang berurutan saling beririsan (atau bersambung) bila $(k + 1)^2 + 2(k + 1) \leq 2k^2 - 4k + 1$, yaitu $k^2 - 8k - 2 \geq 0$, yang benar untuk $k \geq 9$. Jadi gabungannya memuat semua $n \geq 99$. ■

SOAL 2 ALJABAR

Buktikan bahwa untuk semua bilangan real $x_1, \dots, x_n$ berlaku $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Salah satu pendekatan: induksi dengan “menggeser” semua x_i sebesar t yang sama pada suatu subhimpunan, lalu memakai kecekungan $\sqrt{|\cdot|}$ untuk menunjukkan selisih kedua ruas minimum di titik ujung, di mana suatu x_i menjadi nol atau dua bilangan menjadi berlawanan tanda sama besar; kasus-kasus itu direduksi ke n yang lebih kecil. Pendekatan lain memakai representasi integral $\sqrt{|t|} = c \int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{x^{3/2}} dx$.

SOAL 3 GEOMETRI

Titik D di dalam segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$ memenuhi $\angle DAB = \angle CAD$. Titik E pada AC memenuhi $\angle ADE = \angle BCD$, titik F pada AB memenuhi $\angle FDA = \angle DBC$, dan titik X pada garis AC memenuhi $CX = BX$. Misalkan O_1 dan O_2 pusat lingkaran luar ADC dan EXD . Buktikan BC , EF , dan O_1O_2 bertemu di satu titik.

⚡ **Arah penyelesaian.** Soal geometri tersulit tahun itu. Kuncinya adalah memandang titik potong BC dan EF sebagai pusat radikal suatu pasangan lingkaran, sehingga cukup ditunjukkan titik itu berkuasa sama terhadap lingkaran ADC dan EXD ; syarat sudut memberi kesebangunan yang menghasilkan kesamaan kuasa tersebut.

SOAL 4 GEOMETRI

Lingkaran Γ berpusat I menyinggung keempat sisi segi empat konveks $ABCD$. Lingkaran luar Ω segitiga AIC dipotong perpanjangan BA di luar A di X , per-

panjang BC di luar C di Z , serta perpanjangan AD dan CD di luar D di Y dan T .
Buktikan $AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Tunjukkan dengan pengejaran sudut bahwa I adalah titik tengah busur XZ dan busur YT pada Ω dan bahwa pasangan segitiga yang bersesuaian kongruen, sehingga beberapa ruas pada kedua ruas persamaan sama panjang. Sisanya diselesaikan dengan fakta bahwa panjang garis singgung dari satu titik ke Γ sama.

🔑 SOAL 5 KOMBINATORIKA

Dua tupai mengumpulkan 2021 kenari bernomor 1 sampai 2021 dan meletakkannya satu per satu di 2021 lubang yang tersusun melingkar tanpa memperhatikan nomor. Kemudian dilakukan 2021 langkah: pada langkah ke- k , posisi dua kenari yang bertetangga dengan kenari k ditukar. Buktikan ada k sehingga pada langkah ke- k kenari yang ditukar adalah a dan b dengan $a < k < b$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Andaikan tidak ada, sehingga pada setiap langkah k kedua kenari yang ditukar keduanya lebih kecil atau keduanya lebih besar dari k . Pembahasan yang dikenal melacak, sepanjang proses, susunan kenari bernomor “kecil” dan “besar” relatif terhadap k di sekitar lingkaran, lalu menurunkan kontradiksi dari fakta bahwa 2021 ganjil: suatu besaran paritas yang ditentukan oleh susunan tersebut harus berubah pada suatu langkah.

🔑 SOAL 6 ALJABAR / KOMBINATORIKA

Diberikan $m \geq 2$, himpunan berhingga bilangan bulat A , dan himpunan bagian $B_1, \dots, B_m$ dari A . Jika untuk setiap $k = 1, \dots, m$ jumlah unsur B_k adalah m^k , buktikan A memiliki paling sedikit $\frac{m}{2}$ unsur.

⚡ **Arah penyelesaian.** Misalkan $A = \{a_1, \dots, a_r\}$. Pandang semua kombinasi $\sum_k c_k m^k$ dengan $0 \leq c_k < m$; jumlah-jumlah ini semuanya berbeda (representasi basis m), tetapi setiap jumlah dapat ditulis sebagai $\sum_i a_i d_i$ dengan d_i di rentang terbatas. Membandingkan banyak nilai berbeda di kedua sisi memberi $m^m \leq (\text{sesuatu})^r$, yang memaksa $r \geq \frac{m}{2}$.

🏆 **Pelajaran.** Pada tahun dengan batas emas 24, satu soal menengah ditambah poin parsial sudah cukup untuk emas. Yang hilang tahun ini justru poin parsial: Soal 2 dan 3 nyaris nol. Ketika soal sulit, penulis solusi yang terlatih mencatat setiap lema dan kasus khusus yang terbukti; itulah yang membedakan perunggu dari perak dan perak dari emas. Lihat bagian poin parsial di Bab 43.

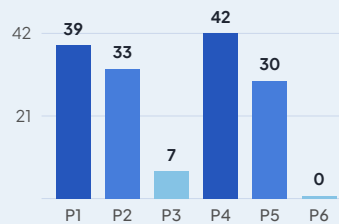
IMO 2022

Oslo 2022 mencatat batas medali tertinggi kedua dekade ini: emas 34, perak 29, perunggu 23.

Tim Indonesia mencetak 151 poin, total tertinggi ketiga dalam dua puluh tahun, tetapi hanya menempati peringkat 38 dan tidak meraih emas. Angka ini menunjukkan sesuatu yang penting: standar dunia terus naik. Skor yang tidak jauh dari 160 poin (peringkat 14 pada 2019) kini hanya menghasilkan peringkat 38.

Tuan rumah Oslo, Norwegia
 Partisipasi 104 negara
 Batas medali 34 / 29 / 23 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 38, total 151 poin

 1 perak  4 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 KOMBINATORIKA

Marianne memiliki n koin aluminium (A) dan n koin perunggu (B) berjajar dalam urutan sembarang. Sebuah *rantai* adalah deret koin berurutan sejenis. Untuk bilangan tetap $k \leq 2n$, Marianne berulang kali menentukan rantai terpanjang yang memuat koin ke- k dari kiri dan memindahkan seluruh rantai itu ke ujung kiri. Tentukan semua pasangan (n, k) sehingga untuk setiap susunan awal, pada suatu saat n koin terkiri sejenis.

Jawaban: $n \leq k \leq \lceil 3n/2 \rceil$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Untuk $k < n$, susunan $A^{n-1}B^nA$ tidak pernah berubah: koin ke- k berada di rantai terkiri. Untuk $k > \lceil 3n/2 \rceil$, susunan $A^{\lfloor n/2 \rfloor}B^{\lfloor n/2 \rfloor}A^{\lfloor n/2 \rfloor}B^{\lfloor n/2 \rfloor}$ berputar di antara empat rantai tanpa pernah berhasil (diperiksa juga dengan komputer untuk $n \leq 7$). Untuk $n \leq k \leq \lceil 3n/2 \rceil$, setiap langkah tidak menambah banyak rantai, dan selama ada lebih dari dua rantai, dalam beberapa langkah banyak rantai berkurang; ketika tersisa dua rantai, n koin terkiri sejenis.

🔑 SOAL 2 ALJABAR

Tentukan semua $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ada *tepat satu* $y \in \mathbb{R}_{>0}$ dengan $xf(y) + yf(x) \leq 2$.

Jawaban: $f(x) = \frac{1}{x}$.

🔑 **Ide kunci.** Tunjukkan bahwa pasangan unik dari x adalah x sendiri.

Solusi. *Pemeriksaan.* Untuk $f(x) = \frac{1}{x}$, syaratnya $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2$, yang menurut AM-GM hanya berlaku untuk $y = x$.

Pasangan x adalah x . Misalkan $y \neq x$ pasangan x . Syaratnya simetris, jadi x pasangan y . Karena pasangan tunggal, (x, x) dan (y, y) tidak memenuhi: $2xf(x) > 2$ dan $2yf(y) > 2$. Maka dengan AM-GM, $xf(y) + yf(x) \geq 2\sqrt{xf(x) \cdot yf(y)} > 2$, kontradiksi. Jadi pasangan x adalah x , sehingga $xf(x) \leq 1$, dan $xf(y) + yf(x) > 2$ untuk semua $y \neq x$.

$f(x) = \frac{1}{x}$. Andaikan $f(x) < \frac{1}{x}$ untuk suatu x . Untuk $y \neq x$, $f(y) \leq \frac{1}{y}$, sehingga $xf(y) + yf(x) \leq g(y) := \frac{x}{y} + yf(x)$. Fungsi g kontinu dengan $g(x) = 1 + xf(x) < 2$, jadi $g(y) < 2$ untuk y yang cukup dekat dengan x . Maka $y \neq x$ tersebut juga pasangan x , kontradiksi. ■

🔑 SOAL 3 TEORI BILANGAN

Diberikan bilangan asli k dan himpunan berhingga S berisi bilangan prima ganjil. Buktikan paling banyak ada satu cara (tidak membedakan rotasi dan pencerminan) menempatkan unsur-unsur S pada lingkaran sehingga hasil kali setiap dua tetangga berbentuk $x^2 + x + k$ untuk suatu bilangan asli x .

⚡ **Arah penyelesaian.** Induksi pada $|S|$ dengan membuang prima terbesar p . Jika q dan r tetangga p , dengan $pq = x^2 + x + k$ dan $pr = y^2 + y + k$, maka x dan y adalah akar $t^2 + t + k \equiv 0 \pmod{p}$ dengan $0 \leq x, y < p$, sehingga $x + y = p - 1$ (atau $x = y$). Dari sini diturunkan bahwa qr juga berbentuk $z^2 + z + k$, sehingga lingkaran tanpa p tetap sah, dan posisi p ditentukan secara tunggal.

SOAL 4 GEOMETRI

Segi lima konveks $ABCDE$ memenuhi $BC = DE$. Titik T di dalamnya memenuhi $TB = TD$, $TC = TE$, dan $\angle ABT = \angle TEA$. Garis AB memotong CD dan CT di P dan Q (urutan P, B, A, Q), dan garis AE memotong CD dan DT di R dan S (urutan R, E, A, S). Buktikan P, S, Q, R konsiklis.

 **Ide kunci.** Segitiga TBC dan TDE kongruen (sisi-sisi-sisi).

 **Arah penyelesaian.** Dari kongruensi diperoleh kesamaan sudut di C dan E serta di B dan D . Bersama $\angle ABT = \angle TEA$, pengejaran sudut menghasilkan kesebangunan segitiga-segitiga yang dibentuk garis AB, AE, CD, CT, DT ; kesebangunan itu memberi $\angle SPQ = \angle SRQ$ (atau kesamaan kuasa titik yang setara).

SOAL 5 TEORI BILANGAN

Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, p) dengan p prima dan $a^p = b! + p$.

Jawaban: $(2, 2, 2)$ dan $(3, 4, 3)$.

 **Ide kunci.** Bandingkan a dengan p : tiga kasus $a < p$, $a > p$, $a = p$.

Solusi. Jelas $a \geq 2$.

Kasus $a < p$. Jika $b \geq p$, maka $a^p \equiv 0 \pmod{p}$, sehingga $p \mid a$, mustahil. Jadi $b < p$. Jika $a \leq b$, maka $a \mid b!$ dan $a \mid a^p$, sehingga $a \mid p$, mustahil. Jadi $a \geq b + 1$. Tetapi $b! \leq b^b < (b+1)^b \leq (b+1)^{p-1}$, sehingga $a^p - b! \geq (b+1)^p - (b+1)^{p-1} = b(b+1)^{p-1} \geq 2^{p-1} \geq p$, dengan paling sedikit satu ketaksamaan tegas; jadi $a^p > b! + p$. Kontradiksi.

Kasus $a > p$. Jika $b < p$, maka $b! \leq (p-1)! < p^{p-1} \leq p^p - p < a^p - p$, kontradiksi; jadi $b \geq p$, $p \mid a$, dan $p^p \mid a^p$. Jika $b \geq 2p$, maka $p^2 \mid b!$ sehingga $v_p(b! + p) = 1 < p$; jadi $p \leq b \leq 2p - 1$. Dengan memasang i dan $2p - i$ (AM-GM: $i(2p - i) \leq p^2$), $b! \leq (2p - 1)! \leq p \cdot (p^2)^{p-1} = p^{2p-1}$. Di sisi lain $a \geq p^2$: jika a pangkat p , maka $a \geq p^2$ karena $a > p$; jika a memiliki faktor prima $q \neq p$, maka $q > b \geq p$ (sebab $q \leq b$ akan membagi $b!$ dan a^p , sehingga membagi p), jadi $a \geq pq > p^2$. Maka $a^p \geq p^{2p} > p^{2p-1} + p \geq b! + p$, kontradiksi.

Kasus $a = p$. $b! = p^p - p$. Untuk $p = 2$ diperoleh $b! = 2$, $b = 2$. Untuk $p = 3$ diperoleh $b! = 24$, $b = 4$. Untuk $p = 5$ dan $p = 7$, 3120 dan 823 536 bukan faktorial. Untuk $p \geq 11$: karena $p \nmid p^{p-1} - 1$, $v_p(b!) = 1$, sehingga $b \geq p$. Dengan LTE, $v_2(p^{p-1} - 1) = 2v_2(p - 1) + v_2(p + 1) - 1 \leq 2 \log_2 p$, sedangkan $v_2(b!) \geq v_2((p - 1)!) \geq \frac{p-1}{2} + \frac{p-3}{4} = \frac{3p-5}{4} > 2 \log_2 p$ untuk $p \geq 11$. Padahal $v_2(b!) = v_2(p^{p-1} - 1)$. Kontradiksi. ■

SOAL 6 KOMBINATORIKA

Papan $n \times n$ diisi bilangan $1, 2, \dots, n^2$ (setiap bilangan sekali); dua petak bertetangga jika berbagi sisi. Sebuah *lembah* adalah petak yang semua tetangganya berisi bilangan lebih besar. *Lintasan menanjak* adalah deret satu atau lebih petak yang diawali lembah, petak berurutan bertetangga, dan bilangannya naik. Tentukan banyak minimum lintasan menanjak.

Jawaban: $2n^2 - 2n + 1$.

 **Arah penyelesaian.** *Batas bawah:* setiap pasangan petak bertetangga (u, v) dengan bilangan $u < v$ merupakan ujung dari paling sedikit satu lintasan menanjak yang berakhir dengan langkah $u \rightarrow v$ (telusuri mundur dari u selalu ke tetangga yang lebih kecil sampai lembah). Ada $2n(n-1)$ pasangan bertetangga, ditambah paling sedikit satu lintasan sepanjang satu petak (lembah bernilai 1). *Konstruksi:* susun bilangan sehingga hanya ada satu lembah dan petak-petak membentuk “pohon” dengan tepat satu cara menanjak ke setiap pasangan.

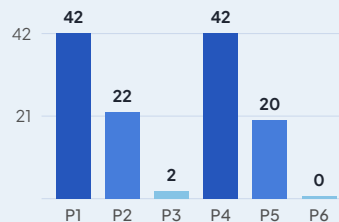
 **Pelajaran.** Dengan batas emas 34, strategi “7 + 7+ parsial” tidak lagi cukup; dibutuhkan empat soal penuh ditambah beberapa poin. Soal 2 dan Soal 5 tahun ini dapat diselesaikan penuh dengan alat Bab 1 dan Bab 7, sebagaimana ditunjukkan pembahasan di atas. Kenaikan standar dunia berarti program pembinaan harus bergerak lebih cepat daripada dunia, bukan hanya lebih cepat daripada tahun lalu.

IMO 2023

Chiba 2023 menyajikan dua soal “mudah” yang ideal: Soal 1 (pembagi dan simetri $d \leftrightarrow n/d$) dan Soal 4 (AM-GM yang melompat dua langkah). Tim Indonesia menyelesaikan keduanya dengan sempurna (42 dan 42).

Namun Soal 2 (geometri) dan Soal 5 (segitiga Jepang) hanya menghasilkan 22 dan 20 poin. Hasil akhir: peringkat 39, satu perak, tiga perunggu, dua HM.

Tuan rumah Chiba, Jepang
 Partisipasi 112 negara
 Batas medali 32 / 25 / 18 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 39, total 128 poin
 1 perak  3 perunggu  2 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 TEORI BILANGAN

Tentukan semua bilangan komposit $n > 1$ yang memenuhi: jika $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ semua pembagi positif n , maka $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$ untuk setiap $1 \leq i \leq k-2$.

Jawaban: semua pangkat prima $n = p^r$ dengan $r \geq 2$.

 **Ide kunci.** Gunakan simetri $d_i d_{k+1-i} = n$ untuk berpindah dari pembagi terkecil ke terbesar.

Solusi. Untuk $n = p^r$, pembaginya $1, p, \dots, p^r$ dan $p^i \mid p^{i+1} + p^{i+2}$. Sebaliknya, misalkan n memiliki paling sedikit dua faktor prima; misalkan p faktor prima terkecil dan q faktor

prima terkecil kedua. Pembagi-pembagi yang lebih kecil dari q hanyalah pangkat p , sehingga $d_1, \dots, d_{a+1} = 1, p, \dots, p^a$ dengan $a \geq 1$, dan $d_{a+2} = q$. Karena $d_{k+1-j} = n/d_j$,

$$d_{k-a-1} = \frac{n}{q}, \quad d_{k-a} = \frac{n}{p^a}, \quad d_{k-a+1} = \frac{n}{p^{a-1}}.$$

Syarat untuk $i = k-a-1$: $\frac{n}{q} \mid \frac{n}{p^a} + \frac{n}{p^{a-1}} = \frac{n(p+1)}{p^a}$. Jadi $\frac{q(p+1)}{p^a}$ bulat, sehingga $p^a \mid q(p+1)$. Karena $p \nmid q$ dan $p \nmid p+1$, ini mustahil untuk $a \geq 1$. ■

SOAL 2 GEOMETRI

Segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$ memiliki lingkaran luar Ω . Titik S titik tengah busur CB yang memuat A . Garis tegak lurus dari A ke BC memotong BS di D dan memotong Ω lagi di $E \neq A$. Garis melalui D sejajar BC memotong garis BE di L . Lingkaran luar ω segitiga BDL memotong Ω lagi di $P \neq B$. Buktikan garis singgung ω di P memotong garis BS pada garis bagi dalam $\angle BAC$.

 **Arah penyelesaian.** Misalkan garis bagi $\angle BAC$ memotong BS di X ; perlu dibuktikan XP menyinggung ω , yaitu $XP^2 = XD \cdot XB$. Pengejaran sudut menunjukkan A, P , dan titik-titik pada garis SE memiliki hubungan kesebangunan, dan X ternyata berkuasa sama terhadap ω dan terhadap suatu lingkaran lain yang melalui P ; pembahasan resmi memakai titik antipodal S dan sifat busur tengah.

SOAL 3 ALJABAR

Untuk setiap $k \geq 2$, tentukan semua barisan bilangan asli $a_1, a_2, \dots$ sehingga ada polinomial $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_0$ dengan c_i bulat tak negatif yang memenuhi $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$ untuk semua $n \geq 1$.

Jawaban: barisan aritmetika $a_n = a_1 + (n-1)d$ dengan $d \geq 0$ bulat.

 **Arah penyelesaian.** Barisan aritmetika memenuhi dengan $P(x) = (x+d)(x+2d) \cdots (x+kd)$. Untuk arah sebaliknya, tunjukkan barisan tidak turun lalu tidak dapat melonjak, sehingga selisih berurutan terbatas; argumen ekstremal pada selisih yang muncul tak hingga kali menunjukkan selisih konstan.

SOAL 4 ALJABAR

Bilangan real positif berbeda $x_1, \dots, x_{2023}$ memenuhi: $a_n = \sqrt{(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$ bulat untuk setiap $n = 1, \dots, 2023$. Buktikan $a_{2023} \geq 3034$.

 **Ide kunci.** Tunjukkan $a_{n+2} \geq a_n + 3$.

Solusi. Misalkan $S = x_1 + \dots + x_n$, $T = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}$ (jadi $a_n^2 = ST$), dan $x = x_{n+1}$, $y = x_{n+2}$. Maka

$$a_{n+2}^2 = (S + x + y)\left(T + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = ST + \left(\frac{S}{x} + Tx\right) + \left(\frac{S}{y} + Ty\right) + (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Dengan AM-GM, dua kurung pertama masing-masing paling sedikit $2\sqrt{ST} = 2a_n$, dan kurung terakhir paling sedikit 4. Jadi $a_{n+2}^2 \geq a_n^2 + 4a_n + 4 = (a_n + 2)^2$. Kesamaan di kurung terakhir memerlukan $x = y$, padahal $x \neq y$, jadi $a_{n+2} > a_n + 2$, dan karena bulat, $a_{n+2} \geq a_n + 3$. Dengan $a_1 = 1$ diperoleh $a_{2023} \geq 1 + 3 \cdot 1011 = 3034$. ■

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Segitiga Jepang terdiri atas n baris lingkaran; baris ke- i memuat i lingkaran, tepat satu di antaranya merah. Lintasan ninja adalah deret n lingkaran yang dimulai dari puncak dan setiap kali turun ke salah satu dari dua lingkaran tepat di bawahnya. Tentukan k terbesar sehingga setiap segitiga Jepang memiliki lintasan ninja yang memuat paling sedikit k lingkaran merah.

Jawaban: $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

 **Arah penyelesaian.** *Batas bawah:* untuk setiap lingkaran, definisikan nilai maksimum banyak lingkaran merah pada lintasan ninja yang berakhir di situ; buktikan dengan induksi bahwa jumlah nilai-nilai di baris ke- i tumbuh cukup cepat sehingga di baris ke- n ada nilai paling sedikit $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. *Batas atas:* konstruksi dengan membagi baris menjadi blok $[2^j, 2^{j+1})$ dan menempatkan lingkaran merah “bergeser” sehingga setiap lintasan hanya dapat mengambil satu lingkaran merah per blok.

SOAL 6 GEOMETRI

Pada segitiga sama sisi ABC , titik A_1, B_1, C_1 di dalam segitiga memenuhi $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, dan $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$. Misalkan BC_1 dan CB_1 bertemu di A_2 , CA_1 dan AC_1 di B_2 , serta AB_1 dan BA_1 di C_2 . Buktikan jika $A_1B_1C_1$ tidak sama kaki, maka lingkaran luar AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 melalui dua titik yang sama.

 **Arah penyelesaian.** Soal tersulit tahun itu. Ide utama: tunjukkan ketiga lingkaran memiliki kuasa yang sama terhadap dua titik tertentu (misalnya pusat lingkaran luar $A_1B_1C_1$ dan satu titik lain), sehingga ketiga lingkaran bersumbu radikal sama. Syarat

480° memberi konfigurasi sudut yang membuat kesebangunan-kesebangunan yang diperlukan berlaku.

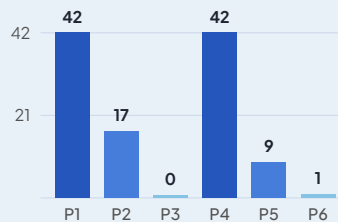
 **Pelajaran.** Soal 1 dan 4 adalah model soal “satu ide kunci yang rapi”, dan tim menguasainya. Soal 4 layak dipelajari ulang: AM-GM yang dipakai pada a_{n+2} alih-alih a_{n+1} adalah contoh bagaimana melangkah dua kali dapat memecahkan kebuntuan. Untuk menembus perak dan emas, soal geometri menengah seperti Soal 2 harus dilatih dengan disiplin: kejar sudut, cari segi empat talibusur, dan hitung kuasa titik.

IMO 2024

Bath 2024 membawa satu emas untuk Indonesia, satu-satunya emas sejak 2020. Peringkat tim 41 dengan 111 poin, dengan Soal 1 dan Soal 4 sempurna (42 dan 42).

Soal 2 tahun ini adalah soal teori bilangan yang indah: begitu modulus $ab + 1$ dipilih, teorema Euler menyelesaikan semuanya. Tetapi skor tim di Soal 5 hanya 9 poin, dan Soal 3 dan 6 nyaris nol.

Tuan rumah Bath, Inggris
 Partisipasi 108 negara
 Batas medali 29 / 22 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 41, total 111 poin
 1 emas  3 perunggu  2 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 ALJABAR

Tentukan semua bilangan real α sehingga untuk setiap bilangan asli n , bilangan $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$ kelipatan n .

Jawaban: semua bilangan bulat genap.

Solusi. Untuk $\alpha = 2m$ jumlahnya $2m \cdot \frac{n(n+1)}{2} = mn(n+1)$. Jika α memenuhi, maka $\alpha \pm 2$ juga (jumlahnya berubah sebesar $\pm n(n+1)$), jadi cukup membuktikan: jika $0 \leq \alpha < 2$ memenuhi, maka $\alpha = 0$. Misalkan S_n jumlah tersebut.

Jika $0 \leq \alpha < 1$: dengan induksi $\lfloor n\alpha \rfloor = 0$ untuk semua n . Jika benar untuk $i < n$, maka $S_n = \lfloor n\alpha \rfloor \in [0, n-1]$ harus kelipatan n , jadi nol. Maka $n\alpha < 1$ untuk semua n , sehingga $\alpha = 0$.

Jika $1 \leq \alpha < 2$: dengan induksi $\lfloor n\alpha \rfloor = 2n - 1$. Jika benar untuk $i < n$, maka $S_n = (n-1)^2 + \lfloor n\alpha \rfloor \equiv 1 + \lfloor n\alpha \rfloor \pmod{n}$ dan $1 + \lfloor n\alpha \rfloor \in [n+1, 2n]$, sehingga $\lfloor n\alpha \rfloor = 2n - 1$. Maka $n\alpha \geq 2n - 1$ untuk semua n , yaitu $\alpha \geq 2$, kontradiksi. ■

SOAL 2 TEORI BILANGAN

Tentukan semua pasangan bilangan asli (a, b) sehingga ada bilangan asli g dan N dengan $\text{FPB}(a^n + b, b^n + a) = g$ untuk semua $n \geq N$.

Jawaban: $(a, b) = (1, 1)$.

 **Ide kunci.** Modulus $M = ab + 1$ dan eksponen $n \equiv -1 \pmod{\varphi(M)}$.

Solusi. Untuk $(1, 1)$ nilainya selalu 2. Sebaliknya, misalkan $M = ab + 1$; maka $\text{FPB}(a, M) = \text{FPB}(b, M) = 1$ dan $ab \equiv -1 \pmod{M}$, sehingga $a^{-1} \equiv -b$ dan $b^{-1} \equiv -a \pmod{M}$. Ambil $n = t\varphi(M) - 1 \geq N$. Menurut Euler, $a^n \equiv a^{-1} \equiv -b$, jadi $M \mid a^n + b$; demikian pula $M \mid b^n + a$. Maka $M \mid g$. Sekarang ambil $n = t\varphi(M) \geq N$: $M \mid g \mid a^n + b \equiv 1 + b \pmod{M}$, sehingga $ab + 1 \mid b + 1$. Maka $ab + 1 \leq b + 1$, jadi $a = 1$. Dengan cara sama $b = 1$. ■

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Barisan bilangan asli $a_1, a_2, \dots$ dan bilangan asli N memenuhi: untuk setiap $n > N$, a_n sama dengan banyak kemunculan a_{n-1} di antara $a_1, \dots, a_{n-1}$. Buktikan paling sedikit salah satu dari barisan $a_1, a_3, a_5, \dots$ dan $a_2, a_4, a_6, \dots$ akhirnya periodik.

 **Arah penyelesaian.** Tunjukkan dulu bahwa nilai-nilai besar hanya muncul terbatas kali dan bilangan kecil muncul tak hingga kali, lalu bahwa suku-suku berselang-seling antara “bilangan kecil” dan “hitungan kemunculan”. Dengan mengendalikan himpunan bilangan yang muncul tak hingga kali, subbarisan pada salah satu paritas indeks menjadi periodik.

SOAL 4 GEOMETRI

Segitiga ABC dengan $AB < AC < BC$ memiliki pusat lingkaran dalam I dan lingkaran dalam ω . Titik $X \neq C$ pada garis BC sehingga garis melalui X sejajar

AC menyinggung ω ; titik $Y \neq B$ pada garis BC sehingga garis melalui Y sejajar AB menyinggung ω . Garis AI memotong lingkaran luar ABC lagi di P . Misalkan K dan L titik tengah AC dan AB . Buktikan $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Pantulkan konfigurasi terhadap I : garis singgung sejajar AC adalah pantulan AC terhadap I . Dari sini $\angle KIL$ dapat dinyatakan lewat segitiga yang dibentuk titik tengah dan titik singgung, sedangkan $\angle YPX$ dihitung dengan memakai $PB = PC = PI$ (lema pusat dalam–pusat singgung luar, Bab 15) dan kesebangunan segitiga PBY , PCX dengan segitiga yang melibatkan I .

SOAL 5 KOMBINATORIKA

Siput Turbo berada di papan 2024 baris dan 2023 kolom. Di 2022 petak tersembunyi monster: tepat satu di setiap baris kecuali baris pertama dan terakhir, dan paling banyak satu di setiap kolom. Setiap percobaan, Turbo mulai dari baris pertama dan bergerak antarpetak bertetangga; jika masuk petak bermonster, percobaan berakhir dan ia kembali ke baris pertama (ia mengingat letak monster). Tentukan n terkecil sehingga Turbo memiliki strategi yang menjamin mencapai baris terakhir paling lambat pada percobaan ke- n .

Jawaban: $n = 3$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Dua percobaan tidak cukup: monster dapat “ditempatkan secara adaptif” untuk menghadang dua lintasan. Tiga percobaan cukup: percobaan pertama menyusuri baris kedua untuk menemukan monster di baris itu; jika monster tidak di pinggir, dua kolom di sampingnya memberi jalan zig-zag yang aman. Jika monster di pinggir, percobaan kedua dan ketiga memakai lintasan diagonal yang memanfaatkan fakta bahwa setiap kolom memuat paling banyak satu monster.

SOAL 6 ALJABAR

Fungsi $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ disebut *aquaesulian* jika untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$ berlaku $f(x + f(y)) = f(x) + y$ atau $f(f(x) + y) = x + f(y)$. Buktikan ada bilangan bulat c sehingga untuk setiap fungsi aquaesulian f ada paling banyak c bilangan rasional berbentuk $f(r) + f(-r)$, dan tentukan c terkecil.

Jawaban: $c = 2$.

⚡ **Arah penyelesaian.** Tunjukkan f injektif dan $f(0) = 0$, lalu bahwa $f(r) + f(-r)$ hanya dapat mengambil nilai 0 dan satu nilai lain. Contoh dengan dua nilai: $f(x) =$

$2[x] - x$ adalah aquaesulian dan $f(r) + f(-r) \in \{0, 2\}$ dengan kedua nilai tercapai, sehingga $c = 1$ tidak cukup.

 **Pelajaran.** Soal 1 tahun ini diselesaikan dengan induksi (Bab 21) dan Soal 2 dengan teorema Euler (Bab 7); peserta yang menyelesaikan keduanya bersama Soal 4 sudah mengantongi 21 poin, dan satu soal menengah lagi membawanya ke wilayah emas. Yang dibutuhkan adalah keberanian memilih objek yang tepat, dalam hal ini modulus $M = ab + 1$. Skor Soal 5 yang rendah menunjukkan bahwa kombinatorika tipe “strategi dengan informasi bertahap” perlu masuk program latihan secara khusus.

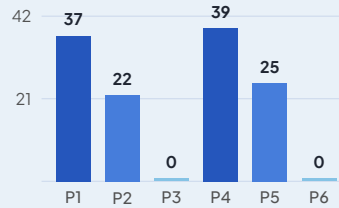
IMO 2025

Sunshine Coast 2025 mencatat batas emas tertinggi dekade ini: 35.

Artinya, peraih emas harus menyelesaikan lima soal atau setara.

Tim Indonesia memperoleh empat perunggu dan dua HM, peringkat 45 dengan 123 poin. Skor Soal 1 dan Soal 4 (37 dan 39) sedikit di bawah biasanya, dan Soal 3 serta Soal 6 kosong.

Tuan rumah Sunshine Coast, Australia
 Partisipasi 110 negara
 Batas medali 35 / 28 / 19 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 45, total 123 poin
 4 perunggu  2 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 KOMBINATORIKA

Sebuah garis disebut *cerah* jika tidak sejajar sumbu- x , sumbu- y , maupun garis $x + y = 0$. Diberikan $n \geq 3$. Tentukan semua bilangan bulat tak negatif k sehingga ada n garis berbeda yang memenuhi: setiap titik (a, b) dengan a, b bilangan asli dan $a + b \leq n + 1$ terletak pada paling sedikit satu garis, dan tepat k dari n garis itu cerah.

Jawaban: $k \in \{0, 1, 3\}$.

 **Arah penyelesaian.** *Konstruksi.* $k = 0$: garis $x = 1, \dots, x = n$. $k = 1$: garis $x = 1, \dots, x = n - 1$ dan garis cerah $y = x - n + 1$ melalui $(n, 1)$. $k = 3$: garis

$x = 1, \dots, x = n - 3$ menyisakan segitiga enam titik yang (setelah digeser) adalah $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$; tiga garis cerah melalui $\{(1, 1), (2, 2)\}, \{(1, 2), (3, 1)\}, \{(1, 3), (2, 1)\}$ menutupnya. *Ketidakmungkinan*: tunjukkan bahwa salah satu garis tepi segitiga titik harus dipakai; membuangnya mereduksi n menjadi $n - 1$ tanpa mengubah k , sampai $n = 3$, lalu periksa bahwa $k = 2$ mustahil dan $k \geq 4$ melebihi banyak garis yang diperlukan.

SOAL 2 GEOMETRI

Lingkaran Ω dan Γ berpusat M dan N , jari-jari Ω lebih kecil, berpotongan di A dan B . Garis MN memotong Ω di C dan Γ di D dengan urutan C, M, N, D . Misalkan P pusat lingkaran luar ACD . Garis AP memotong Ω lagi di E dan Γ lagi di F . Misalkan H titik tinggi segitiga PMN . Buktikan garis melalui H yang sejajar AP menyinggung lingkaran luar BEF .

 **Arah penyelesaian.** Tunjukkan dulu fakta-fakta sudut: PM adalah sumbu AC dan karena $MA = MC$ membagi dua sudut luar $\angle AMC$ segitiga AMN ; demikian pula PN . Jadi P adalah pusat lingkaran singgung luar segitiga AMN di hadapan A . Kemudian identifikasi pusat lingkaran BEF dan hitung jaraknya ke garis melalui H sejajar AP ; banyak peserta menyelesaikannya dengan koordinat setelah fakta-fakta ini diketahui.

SOAL 3 TEORI BILANGAN

Fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ disebut *bonza* jika $f(a) \mid b^a - f(b)^{f(a)}$ untuk semua bilangan asli a, b . Tentukan konstanta real c terkecil sehingga $f(n) \leq cn$ untuk semua fungsi bonza f dan semua n .

Jawaban: $c = 4$.

 **Arah penyelesaian.** *Contoh:* fungsi yang bernilai 1 pada bilangan ganjil, 2 pada $n \equiv 2 \pmod{4}$, dan $2^{v_2(n)+2}$ pada kelipatan 4 adalah bonza (periksa dengan LTE), dan $f(2^k) = 4 \cdot 2^k$. *Batas atas:* tunjukkan faktor prima $f(n)$ membagi n , lalu bahwa jika f tidak identik pada bilangan prima maka $f(p) = 1$ untuk semua prima ganjil p yang cukup banyak, sehingga $f(n)$ adalah pangkat 2; LTE memberi $v_2(f(n)) \leq v_2(n) + 2$.

SOAL 4 TEORI BILANGAN

Pembagi sejati bilangan asli N adalah pembagi positif selain N . Barisan tak hingga $a_1, a_2, \dots$ bilangan asli, masing-masing memiliki paling sedikit tiga pembagi sejati,

memenuhi: a_{n+1} adalah jumlah tiga pembagi sejati terbesar a_n . Tentukan semua nilai a_1 yang mungkin.

Jawaban: $a_1 = 6 \cdot 12^e \cdot m$ dengan $e \geq 0$ dan $\text{FPB}(m, 10) = 1$. (Jawaban ini juga diperiksa dengan komputer untuk semua $a_1 < 20\,000$.)

⬆ **Arah penyelesaian.** Jika a_n ganjil, tiga pembagi sejati terbesarnya paling banyak $\frac{a_n}{3} + \frac{a_n}{5} + \frac{a_n}{7} < a_n$ dan jumlahnya ganjil, sehingga barisan ganjil turun dan akhirnya gagal. Jika a_n genap tetapi tidak habis dibagi 3, jumlahnya $\leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{4} + \frac{a_n}{5} < a_n$, dan analisis serupa menunjukkan barisan akhirnya gagal. Jadi semua suku habis dibagi 6. Jika $4 \nmid a_n$ dan $5 \nmid a_n$, pembagi terbesarnya $\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{6}$ dan $a_{n+1} = a_n$ (titik tetap $6m$). Jika $12 \mid a_n$, maka $a_{n+1} = \frac{13}{12}a_n$, yang mengurangi pangkat 2 dan 3; kelipatan 5 harus dikecualikan karena $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{5} > a$ membuat barisan keluar dari pola.

SOAL 5 KOMBINATORIKA / ALJABAR

Alice dan Bazza memainkan permainan dengan parameter $\lambda > 0$. Pada giliran ke- n : jika n ganjil, Alice memilih $x_n \geq 0$ dengan $x_1 + \dots + x_n \leq \lambda n$; jika n genap, Bazza memilih $x_n \geq 0$ dengan $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq n$. Pemain yang tidak dapat memilih kalah; jika permainan berlangsung selamanya, tidak ada yang menang. Tentukan semua λ sehingga Alice memiliki strategi menang, dan semua λ sehingga Bazza memiliki strategi menang.

Jawaban: Alice menang jika dan hanya jika $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$; Bazza menang jika dan hanya jika $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

⬆ **Arah penyelesaian.** Bazza selalu memilih $x_n = \sqrt{2 - x_{n-1}^2}$ (menghabiskan jatah kuadrat). Dengan Cauchy–Schwarz, $x_{n-1} + x_n \geq \sqrt{2}$, sehingga untuk $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ jumlah Alice akhirnya melampaui λn . Alice, untuk $\lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$, memilih 0 sampai giliran yang cukup jauh lalu memilih satu bilangan besar sehingga jumlah kuadrat melampaui batas Bazza. Untuk $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ kedua strategi bertahan menjamin seri.

SOAL 6 KOMBINATORIKA

Pada papan 2025×2025 Matilda ingin meletakkan ubin persegi panjang (ukuran boleh berbeda, sisi pada garis papan, tidak tumpang tindih) sehingga setiap baris dan setiap kolom memiliki tepat satu petak yang tidak tertutup. Tentukan banyak ubin minimum.

Jawaban: $2112 = 2025 + 2 \cdot 45 - 3$.

 **Arah penyelesaian.** Petak-petak kosong membentuk permutasi. Batas bawah memakai teorema Erdős–Szekeres (Bab 16): permutasi memuat subbarisan naik atau turun yang panjang, dan setiap ubin hanya dapat “melayani” sedikit petak kosong di sepanjang subbarisan itu; perhitungan cermat memberi $n + 2\sqrt{n} - 3$ untuk $n = k^2$. Konstruksi memakai permutasi yang tersusun dari 45 blok “tangga”.

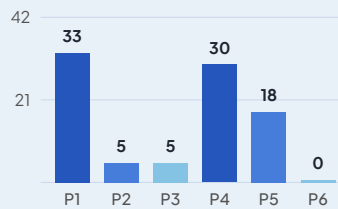
 **Pelajaran.** Tahun dengan batas emas setinggi ini menegaskan bahwa poin di soal 3 dan 6 bukan lagi kemewahan. Soal 3 (fungsi bonza) memiliki langkah awal yang dapat diakses, misalnya membuktikan bahwa faktor prima $f(n)$ membagi n ; langkah seperti ini bernilai poin parsial. Latihan poin parsial harus menjadi bagian tetap dari program, bukan sesuatu yang diharapkan muncul spontan di hari ujian.

IMO 2026

Shanghai 2026 adalah alarm. Dengan 91 poin dan peringkat 63, ini adalah hasil terendah Indonesia dalam sepuluh tahun. Gabungan skor Soal 1 dan Soal 4 ($33 + 30 = 63$ dari 84) adalah yang terendah dalam dekade ini, dan Soal 2 hanya menghasilkan 5 poin.

Padahal paket tahun ini memuat tiga soal yang dapat diselesaikan penuh dengan alat di buku ini: Soal 1 (invarian FPB), Soal 4 (invarian sudut dan langkah pindah), dan Soal 5 (substitusi $x = f(y)$). Ketiganya dibahas lengkap di bawah.

Tuan rumah Shanghai, Tiongkok
 Partisipasi 117 negara
 Batas medali 29 / 23 / 16 (E/P/Pr)
 Indonesia peringkat 63, total 91 poin
 4 perunggu  1 HM



Skor tim Indonesia per soal (maks. 42)

SOAL 1 TEORI BILANGAN

Di papan tertulis 2026 bilangan bulat yang lebih dari 1 (tidak harus berbeda). Dalam satu langkah, Konfusius memilih dua bilangan $m > 1$ dan $n > 1$ dari tempat berbeda dan menggantinya dengan

$$\text{FPB}(m, n) \quad \text{dan} \quad \frac{\text{KPK}(m, n)}{\text{FPB}(m, n)}.$$

Ia terus melangkah selama mungkin. (a) Buktikan bahwa, bagaimanapun pilihannya, setelah berhingga langkah tepat satu bilangan M di papan lebih dari 1. (b) Buktikan nilai M tidak bergantung pada pilihan Konfusius.

Ide kunci. Lihat setiap bilangan prima secara terpisah: operasinya adalah langkah algoritma Euclid pada eksponen.

Solusi. Tetapkan prima p dan misalkan $x = v_p(m)$, $y = v_p(n)$. Maka $v_p(\text{FPB}) = \min(x, y)$ dan $v_p(\frac{\text{KPK}}{\text{FPB}}) = \max(x, y) - \min(x, y)$. Jadi pasangan eksponen (x, y) diganti $(\min, |x - y|)$, dan $\text{FPB}(\min, |x - y|) = \text{FPB}(x, y)$. Akibatnya, untuk setiap prima p , bilangan $g_p = \text{FPB}$ dari eksponen p pada semua bilangan di papan adalah *invariant*.

(a) *Berhenti.* Misalkan T jumlah semua eksponen prima dari semua bilangan di papan. Satu langkah mengubah kontribusi m, n dari $\sum_p (x_p + y_p)$ menjadi $\sum_p \max(x_p, y_p)$, jadi T turun sebesar $\sum_p \min(x_p, y_p)$. Jika $\text{FPB}(m, n) > 1$, T turun tegas. Jika $\text{FPB}(m, n) = 1$, langkah menghasilkan 1 dan mn , sehingga T tetap tetapi banyak bilangan yang lebih dari 1 berkurang satu; dan pada langkah dengan $\text{FPB} > 1$ banyak itu tidak bertambah. Pasangan (nilai T , banyak bilangan > 1) turun secara leksikografis, jadi proses berhenti, yaitu ketika paling banyak satu bilangan lebih dari 1. Karena bilangan awal lebih dari 1, ada prima p dengan $g_p > 0$; invariant ini menjamin tidak semua bilangan menjadi 1. Jadi tepat satu $M > 1$.

(b) *Ketunggalan.* Di akhir, untuk setiap prima p semua eksponen selain milik M bernilai 0, sehingga $v_p(M) = g_p$. Jadi $M = \prod_p p^{g_p}$, dan g_p ditentukan oleh bilangan-bilangan awal. ■

SOAL 2 GEOMETRI

Pada segitiga ABC , M dan N titik tengah AB dan AC . Titik K dan L dipilih tegas di dalam segitiga BMC dan BNC sehingga K di dalam segitiga ABL dan L di dalam segitiga AKC , dan

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Misalkan O pusat lingkaran luar AKL . Buktikan $OM = ON$.

Ide kunci. $OM = ON$ setara dengan kesamaan kuasa M dan N terhadap lingkaran AKL .

Arah penyelesaian. Karena $OM^2 - R^2 = \text{Kuasa}(M, (AKL))$ dan $ON^2 - R^2 = \text{Kuasa}(N, (AKL))$, cukup dibuktikan kedua kuasa sama. Jika lingkaran AKL memotong

garis AB lagi di X dan garis AC lagi di Y , syaratnya menjadi $MA \cdot MX = NA \cdot NY$ (panjang berarah), yaitu $AB \cdot MX = AC \cdot NY$. Tiga syarat sudut dipakai untuk membangun kesebangunan yang menghasilkan perbandingan ini; pembahasan lengkapnya panjang dan tidak dimuat di sini.

SOAL 3 KOMBINATORIKA

Diberikan bilangan asli n . Liu Bang dan Xiang Yu membagi sebatang tongkat sepanjang 1. Liu menandai paling banyak n titik, lalu Xiang menandai paling banyak n titik (semua titik berbeda). Tongkat dipotong di semua titik bertanda. Kemudian mereka bergantian mengambil satu potongan yang belum diambil, Liu lebih dulu; masing-masing ingin memaksimumkan total panjang miliknya. Untuk setiap n , tentukan c terbesar sehingga Liu dapat menjamin total paling sedikit c .

Jawaban: $c = \frac{2^n}{2^{n+1} - 1}$.

 **Arah penyelesaian.** Liu memotong tongkat menjadi $n + 1$ potongan dengan perbandingan $1 : 2 : 4 : \dots : 2^n$. Potongan-potongan ini “cukup berbeda” sehingga, bagaimanapun Xiang memotong dengan n titik, Liu dapat menjamin paling sedikit bagian sebesar potongan terbesar, $\frac{2^n}{2^{n+1}-1}$; argumennya menelusuri potongan mana yang dipotong Xiang dan memakai urutan pengambilan serakah. Sebaliknya, untuk setiap cara Liu menandai, Xiang dapat memotong sehingga Liu tidak memperoleh lebih dari nilai tersebut.

SOAL 4 KOMBINATORIKA / GEOMETRI

Shan-Yu dan Mulan bermain dengan sudut θ , $0^\circ < \theta < 180^\circ$, yang diketahui keduanya. Mula-mula Shan-Yu membuat segitiga kertas $\mathcal{T}$ sesuai pilihannya. Lalu berulang: jika $\mathcal{T}$ memiliki sudut tepat θ , permainan berhenti dan Mulan menang; jika tidak, Mulan memilih titik P pada keliling $\mathcal{T}$ yang bukan titik sudut dan memotong lurus dari P ke titik sudut di hadapannya; Shan-Yu membuang salah satu dari dua segitiga, dan sisanya menjadi $\mathcal{T}$ yang baru. Untuk θ berapa saja Mulan dapat menjamin kemenangan dalam berhingga langkah?

Jawaban: $\theta = \frac{180^\circ}{n}$ untuk bilangan bulat $n \geq 2$.

 **Ide kunci.** Potongan dari A ke $P \in BC$ dengan $\angle BAP = t$ menghasilkan segitiga bersudut $(B, t, 180^\circ - B - t)$ dan $(C, A - t, B + t)$.

Solusi. Tulis $u \equiv v$ jika $u - v$ kelipatan bulat dari θ .

Jika $180^\circ/\theta$ bukan bilangan bulat, Mulan tidak dapat menjamin kemenangan. Shan-Yu memulai dengan segitiga tanpa sudut yang $\equiv 0$. Andaikan setelah potongan t kedua segitiga memiliki sudut $\equiv 0$. Karena $B, C \not\equiv 0$, segitiga pertama memberi $t \equiv 0$ atau $180^\circ - B - t \equiv 0$, dan segitiga kedua memberi $A - t \equiv 0$ atau $B + t \equiv 0$. Empat kombinasi memberi berturut-turut $A \equiv 0, B \equiv 0, C \equiv 0$ (karena $180^\circ - B - t \equiv 0$ dan $A - t \equiv 0$ memberi $C = 180^\circ - A - B \equiv 0$), atau $180^\circ \equiv 0$. Semuanya mustahil. Jadi Shan-Yu selalu dapat mempertahankan segitiga tanpa sudut $\equiv 0$, khususnya tanpa sudut θ .

Jika $\theta = \frac{180^\circ}{n}$ dengan $n \geq 2$, Mulan menang. Langkah pindah: jika $A > \theta$, Mulan memotong dengan $t = \theta$. Segitiga pertama memuat sudut θ , jadi Shan-Yu harus menyimpan segitiga kedua dengan sudut $(C, A - \theta, B + \theta)$. Jadi Mulan dapat memindahkan θ dari sudut yang lebih dari θ ke sudut lain.

Langkah pertama: misalkan A sudut terbesar. Jika $A \leq \theta$ maka semua sudut paling banyak θ dan $180^\circ \leq 3\theta$, sehingga $n \leq 3$; jika $n = 3$ segitiganya sama sisi dengan sudut θ (Mulan sudah menang), dan jika $n = 2$ semua sudut lancip. Mulan memilih $t \in (0, A)$ dengan $t \equiv -B$: untuk $A > \theta$ selang $(0, A)$ memuat semua sisa, dan untuk kasus lancip $n = 2$ pilih $t = 90^\circ - B < A$ (karena $C < 90^\circ$). Maka segitiga pertama memiliki sudut $180^\circ - B - t \equiv 0$ dan segitiga kedua memiliki sudut $B + t \equiv 0$. Apa pun pilihan Shan-Yu, segitiga baru memiliki sudut $k\theta$ dengan $k \geq 1$ bulat.

Menyelesaikan: selama sudut itu $k\theta$ dengan $k \geq 2$, lakukan langkah pindah darinya; setiap langkah memberi kemenangan langsung atau mengurangi k satu. Setelah paling banyak n langkah, sudut itu menjadi tepat θ . ■

SOAL 5 ALJABAR

Tentukan semua $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sehingga untuk semua $x, y > 0$

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}.$$

Jawaban: $f(x) = x + c$ dengan konstanta $c \geq 0$.

 **Ide kunci.** Substitusi $x = f(y)$ membuat kedua ketaksamaan bertemu.

Solusi. *Pemeriksaan.* Untuk $f(x) = x + c$, ketaksamaan kiri adalah QM-AM untuk x dan $y + c$, dan ketaksamaan kanan adalah AM-GM untuk x dan $y + c$.

Langkah 1. Substitusi $x = f(y)$: ketaksamaan kiri memberi $f(y) \geq \frac{f(f(y)) + y}{2}$ dan ketaksamaan kanan memberi $\frac{f(f(y)) + y}{2} \geq f(y)$. Jadi $f(f(y)) = 2f(y) - y$.

Langkah 2. Misalkan $g(x) = f(x) - x$. Langkah 1 berarti $g(f(y)) = g(y)$, sehingga dengan induksi $f^{(k)}(y) = y + k g(y)$ untuk semua $k \geq 1$. Karena $f^{(k)}(y) > 0$ untuk semua k , haruslah $g(y) \geq 0$. Jadi $f(x) \geq x$.

Langkah 3. Terapkan ketaksamaan kiri pada pasangan $(f(x), y)$ dan $(f(y), x)$, lalu gunakan Langkah 1. Dengan $A = f(x)$, $B = f(y)$, $D = y - x$:

$$2(A^2 + B^2) \geq (2A + D)^2, \quad 2(A^2 + B^2) \geq (2B - D)^2.$$

Tulis $B = A + D + E$ dengan $E = g(y) - g(x)$. Ketaksamaan kedua, setelah dijabarkan, menjadi $4AE \leq D^2 - 2E^2 \leq D^2$, dan dengan menukar peran x, y diperoleh $-4BE \leq D^2$. Karena $A \geq x$ dan $B \geq y$,

$$|g(y) - g(x)| \leq \frac{(y - x)^2}{4 \min(x, y)}.$$

Langkah 4. Untuk $0 < x < y$, bagi $[x, y]$ menjadi N bagian sama panjang dan jumlahkan ketaksamaan Langkah 3: $|g(y) - g(x)| \leq N \cdot \frac{((y-x)/N)^2}{4x} = \frac{(y-x)^2}{4xN}$. Dengan $N \rightarrow \infty$, $g(y) = g(x)$. Jadi g konstan, $g \equiv c \geq 0$. ■

SOAL 6 TEORI BILANGAN

Barisan bilangan bulat $a_1, a_2, \dots$ yang semuanya lebih dari 1 memenuhi: untuk setiap n , a_{n+1} adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari a_n dengan $\text{FPB}(a_{n+1}, a_i) > 1$ untuk semua $i = 1, \dots, n$. Buktikan ada bilangan asli T dan L sehingga $a_{n+T} = a_n + L$ untuk setiap bilangan asli n .

 **Arah penyelesaian.** Contoh: $a_1 = 15$ menghasilkan

15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, ...

dengan $T = 8$ dan $L = 30$. Struktur umumnya: setelah beberapa suku, setiap suku baru habis dibagi faktor prima terkecil tertentu dan himpunan “syarat FPB” ditentukan oleh himpunan berhingga prima. Keanggotaan suatu bilangan dalam barisan lalu hanya bergantung pada sisanya modulo hasil kali prima-prima tersebut, sehingga barisan periodik modulo bilangan itu. Kesulitannya ada pada pembuktian bahwa suku-suku awal pun sudah mengikuti pola periodik ini.

 **Pelajaran.** Tren peringkat Indonesia dari 10 (2018) ke 63 (2026) adalah pesan paling penting dari seluruh Bagian VI. Penurunan terjadi bertahap, bukan tiba-tiba, dan penyebabnya konsisten: soal menengah tidak lagi terselesaikan secara kolektif, sementara standar dunia terus naik. Soal 1, 4, dan 5 tahun ini membuktikan bahwa kuncinya

bukan materi yang lebih tinggi, melainkan penguasaan yang lebih dalam atas materi dasar: invarian (Bab 17), analisis permainan (Bab 20), dan persamaan fungsional (Bab 3). Menguasai kembali soal nomor 2 adalah prioritas pertama program pembinaan.

BAGIAN VII

Simulasi dan Jalan Menuju Emas

Strategi hari kompetisi, paket simulasi, problem set intensif, dan rencana latihan fase akhir: mengubah pengetahuan menjadi skor dalam empat setengah jam.



4 jam 30 menit

Strategi Hari Kompetisi dan Paket Simulasi

Empat setengah jam adalah waktu yang panjang sekaligus sangat singkat. Cukup panjang untuk menyelesaikan tiga soal jika semuanya berjalan lancar, tetapi terlalu singkat jika satu jam habis di jalan buntu. Pengalaman peserta IMO menunjukkan bahwa kesalahan strategi, seperti meninggalkan soal 1 sebelum tertulis rapi atau tidak mencatat lema yang sudah terbukti, sering lebih mahal daripada kekurangan pengetahuan.

Data Bagian VI mempertegas hal ini. Pada 2021, soal 2 dan 3 menghasilkan total 2 poin bagi tim Indonesia, padahal batas emas hanya 24. Poin parsial yang dikumpulkan dengan disiplin dapat mengubah perunggu menjadi perak, dan perak menjadi emas.

PETA BAB

Bab ini menerjemahkan data Bagian VI menjadi kebiasaan kerja selama 4,5 jam: membagi waktu, menghasilkan ide, mengamankan poin parsial, pulih dari kebuntuan, dan menulis bukti yang tidak dapat dipotong penilai. Bab ditutup dengan tiga paket simulasi dari soal IMO sebelum 2017.

43.1 Manajemen waktu 4,5 jam

Waktu	Kegiatan
0:00–0:15	Baca ketiga soal. Coba kasus kecil untuk masing-masing. Tulis dugaan jawaban.
0:15–1:30	Selesaikan soal 1 (atau 4) <i>sampai tuntas</i> , termasuk menulis rapi. Ini adalah 7 poin yang tidak boleh hilang.
1:30–3:30	Soal 2 (atau 5). Jika setelah 45 menit belum ada ide, catat semua pengamatan dan lompat sebentar ke soal 3.
3:30–4:10	Kumpulkan poin parsial: tulis lema, kasus khusus, dan batas yang sudah terbukti.
4:10–4:30	Periksa ulang solusi soal 1: kasus kesamaan, kasus kecil, pemeriksaan jawaban.

⚠ AWAS Kesalahan paling mahal adalah *tidak selesai menulis* soal 1 karena terlalu cepat berpindah ke soal 2. Data Indonesia menunjukkan skor P1+P4 hampir sempurna; menjaga angka itu sama pentingnya dengan menaikkan P2+P5.

43.2 Menghasilkan ide

Ketika buntu, jalankan daftar pertanyaan berikut secara berurutan: (1) Sudahkah saya mencoba kasus $n = 1, 2, 3, 4$ dan melihat pola? (2) Apa jawaban yang diduga, dan kapan kesamaan terjadi? (3) Adakah invarian atau monovarian? (4) Dapatkah soal diperumum atau diperkhusus? (5) Adakah soal serupa di Bagian I–V? (6) Apa yang terjadi jika saya bekerja mundur dari kesimpulan?

43.3 Poin parsial

Penilai IMO memberi poin untuk kemajuan yang *substansial dan terbukti*, bukan untuk jawaban tanpa bukti. Poin parsial yang umum: jawaban benar beserta konstruksi lengkap (1–2 poin untuk soal “tentukan semua”), lema kunci yang terbukti, atau reduksi yang benar ke kasus yang lebih sederhana. Tuliskan setiap lema yang terbukti secara terpisah dan jelas, meskipun soal tidak selesai.

43.4 Pemulihan dari kesalahan

Jika di tengah bukti Anda menemukan kesalahan, jangan menghapus seluruh pekerjaan. Tandai bagian yang salah, tulis perbaikan di halaman baru, dan nyatakan dengan jelas di awal solusi bagian mana yang harus dibaca penilai.

43.5 Memoles bukti

Solusi yang baik berstruktur: pernyataan jawaban, pemeriksaan, lalu klaim-klaim bernomor dengan bukti masing-masing. Setiap “jelas” harus benar-benar jelas bagi pembaca yang cermat. Hindari lompatan kasus: jika memakai “tanpa mengurangi keumuman”, sebutkan alasannya (Bab 21).

43.6 Paket simulasi

Kerjakan setiap paket dalam 4 jam 30 menit tanpa bantuan. Kunci singkat diberikan setelah ketiga paket.

Paket 1

SOAL 1 IMO 2014

Misalkan $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ barisan tak hingga bilangan asli. Buktikan ada tepat satu bilangan $n \geq 1$ sehingga $a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$.

SOAL 2 IMO 2013

Segitiga lancip ABC memiliki titik tinggi H . Titik W pada sisi BC di antara B dan C . Titik M dan N kaki garis tinggi dari B dan C . Misalkan ω_1 lingkaran luar BWN dan X titik pada ω_1 sehingga WX diameter; ω_2 lingkaran luar CWM dan Y titik pada ω_2 sehingga WY diameter. Buktikan X, Y, H segaris.

SOAL 3 IMO 2015

Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga setiap bilangan $ab - c, bc - a, ca - b$ adalah pangkat 2 (pangkat 2 berbentuk 2^m dengan $m \geq 0$ bulat).

Paket 2

SOAL 1 IMO 2011

Untuk himpunan $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ berisi empat bilangan asli berbeda, misalkan $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ dan n_A banyak pasangan (i, j) dengan $1 \leq i < j \leq 4$ sehingga $a_i + a_j$ membagi s_A . Tentukan semua A yang membuat n_A sebesar mungkin.

SOAL 2 IMO 2008

Segitiga lancip ABC memiliki titik tinggi H . Lingkaran yang melalui H dan berpusat di titik tengah BC memotong garis BC di A_1 dan A_2 . Titik B_1, B_2, C_1, C_2 didefinisikan serupa. Buktikan keenam titik $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ konsiklis.

SOAL 3 IMO 2012

Misalkan $n \geq 3$ dan $a_2, a_3, \dots, a_n$ bilangan real positif dengan $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Buktikan $(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n$.

Paket 3**SOAL 1** IMO 2013

Buktikan bahwa untuk setiap pasangan bilangan asli k dan n ada k bilangan asli $m_1, \dots, m_k$ (tidak harus berbeda) sehingga $1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$.

SOAL 2 IMO 2010

Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$ untuk semua bilangan real x, y .

SOAL 3 IMO 2014

Misalkan $n \geq 2$. Konfigurasi n benteng pada papan $n \times n$ disebut damai jika setiap baris dan setiap kolom memuat tepat satu benteng. Tentukan k terbesar sehingga untuk setiap konfigurasi damai ada persegi $k \times k$ yang tidak memuat benteng.

43.7 Kunci singkat

Soal	Jawaban dan ide kunci
P1.1	Misalkan $d_n = (a_0 + \dots + a_n) - na_n$. Maka $d_1 = a_0 > 0$, $d_{n+1} - d_n = n(a_n - a_{n+1}) < 0$, dan syarat soal setara dengan $d_n > 0 \geq d_{n+1}$. Barisan bulat turun tegas melewati nol tepat sekali.
P1.2	Titik Miquel Z dari lingkaran ANM (berdiameter AH), BNW , CMW . Karena $\angle WZX = \angle WZY = 90^\circ$, X, Z, Y segaris; lalu tunjukkan H pada garis yang sama.
P1.3	$(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$, $(3, 5, 7)$ dan permutasinya. Paritas dan penaksiran ukuran; kasus $a = 2$ ditangani terpisah.
P2.1	$\{d, 5d, 7d, 11d\}$ dan $\{d, 11d, 19d, 29d\}$ dengan $n_A = 4$. Pasangan dengan jumlah lebih dari $\frac{s_A}{2}$ tidak mungkin membagi s_A .
P2.2	A terletak pada sumbu radikal lingkaran berpusat titik tengah CA dan AB (keduanya melalui H , dan garis tinggi dari A tegak lurus garis pusat), sehingga B_1, B_2, C_1, C_2 konsiklis; pusatnya O .
P2.3	AM-GM: $1 + a_k = \underbrace{\frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-1}}_{k-1} + a_k \geq k \left(\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}} \right)^{1/k}$. Kalikan; hasilnya teleskopik menjadi n^n , dan kesamaan tidak mungkin terjadi serentak.
P3.1	Induksi pada k . Untuk $n = 2t$: $1 + \frac{2^k-1}{2t} = \left(1 + \frac{2^{k-1}-1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t+2^{k-2}}\right)$; untuk $n = 2t-1$: $\left(1 + \frac{2^{k-1}-1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t-1}\right)$.
P3.2	$f \equiv 0$ dan $f \equiv C$ dengan $1 \leq C < 2$. Substitusi $x = 0$ dan $y = 0$, lalu tunjukkan $\lfloor f(y) \rfloor$ konstan.
P3.3	$k = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$. Batas atas dengan konstruksi “tangga”; batas bawah dengan melihat k baris berurutan yang memuat benteng di kolom pertama.

Problem Set Intensif

Kemampuan menyelesaikan soal menengah dibangun dari ratusan soal, bukan puluhan. Problem set ini dipilih untuk menjembatani latihan bab dan soal IMO sungguhan: setiap soal memakai teknik dari bab-bab sebelumnya, tetapi tanpa diberi tahu teknik mana yang harus dipakai.

Itulah perbedaan utama antara latihan bab dan kompetisi. Di latihan bab, Anda tahu bahwa soal di akhir bab ketaksamaan adalah soal ketaksamaan. Di IMO, Anda harus menemukannya sendiri. Kerjakan problem set ini dalam urutan acak dan catat, sebelum menulis solusi, teknik apa yang Anda duga akan berhasil.

PETA BAB

Dua puluh empat soal campuran untuk fase Olimpiade dan Medali, disusun per bidang dan bertingkat. Kerjakan satu soal ★★ atau ★★★ setiap hari dan tulis solusi lengkap. Petunjuk ada di Lampiran F.

Aljabar

44.1 ★ Buktikan $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$ untuk setiap bilangan asli n .

44.2 ★ Tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x+y) = f(x) + y$ untuk semua x, y .

44.3 ★★ Untuk $a, b, c > 0$, buktikan $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

44.4 ★★ Tentukan semua polinomial real P dengan $P(0) = 0$ dan $P(x^2+1) = P(x)^2+1$.

44.5 ★★★ Untuk $a, b, c > 0$, buktikan $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$. (APMO 2004)

44.6 ★★★ Untuk $x, y, z > 0$ dengan $xyz \geq 1$, buktikan $\sum_{\text{siklis}} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq 0$. (IMO 2005)

Teori Bilangan

44.7 ★ Buktikan $30 \mid n^5 - n$ untuk setiap bilangan bulat n .

44.8 ★ Tentukan semua bilangan asli n sehingga $3 \mid 2^n + 1$.

44.9 ★★ Tentukan semua prima p sehingga $p^2 + 11$ memiliki tepat enam pembagi positif.

44.10 ★★ Buktikan bilangan Fermat $F_m = 2^{2^m} + 1$ dan F_n relatif prima untuk $m \neq n$.

44.11 ★★ Tentukan semua bilangan asli n sehingga $n! + 5$ kuadrat sempurna.

44.12 ★★★ Tentukan semua pasangan bilangan asli (a, b) sehingga $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ bilangan asli. (IMO 2003)

Geometri

44.13 ★ Persegi $ABCD$ bersisi 1. Tentukan jari-jari lingkaran yang melalui A dan B serta menyinggung CD .

44.14 ★ Buktikan jumlah jarak sembarang titik di dalam segitiga sama sisi ke ketiga sisinya konstan (teorema Viviani).

44.15 ★★ Pada segitiga sama kaki $AB = AC$, titik D pada BC . Buktikan $AD^2 + BD \cdot DC = AB^2$.

44.16 ★★ Diagonal segi empat talibusur $ABCD$ saling tegak lurus di P . Buktikan garis melalui P yang tegak lurus BC melalui titik tengah AD .

44.17 ★★ Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC di D . Buktikan titik tengah BC , titik tengah AD , dan I segaris.

44.18 ★★★ Buktikan bahwa pusat-pusat lingkaran dalam segitiga ABC , BCD , CDA , DAB dari segi empat talibusur $ABCD$ membentuk persegi panjang.

Kombinatorika

- 44.19** ★ Berapa banyak cara memasukkan 10 bola identik ke 4 kotak berbeda?
- 44.20** ★ Berapa banyak titik potong diagonal di dalam segi- n konveks jika tidak ada tiga diagonal yang bertemu di satu titik?
- 44.21** ★★ Setiap petak papan 3×7 diwarnai hitam atau putih. Buktikan ada persegi panjang yang keempat sudutnya berwarna sama.
- 44.22** ★★ Buktikan setiap graf dengan n titik dan paling sedikit n sisi memuat siklus.
- 44.23** ★★ Di papan tertulis beberapa bilangan bulat. Satu langkah: pilih $x < y$ dengan $y - x \geq 2$ dan ganti dengan $x + 1$ dan $y - 1$. Buktikan proses selalu berhenti.
- 44.24** ★★★ Diberikan $2n + 1$ bilangan bulat dengan sifat: jika salah satunya dibuang, $2n$ sisanya dapat dibagi dua kelompok berisi n bilangan dengan jumlah sama. Buktikan semua bilangan sama.



Jalan Menuju Emas

Medali emas adalah hasil dari sistem, bukan dari keberuntungan satu hari. Peraih emas IMO umumnya telah menyelesaikan ribuan soal, menulis ratusan solusi lengkap, dan mengikuti puluhan simulasi dalam kondisi ujian. Mereka juga tahu persis di mana kelemahan mereka, karena mencatat setiap kesalahan.

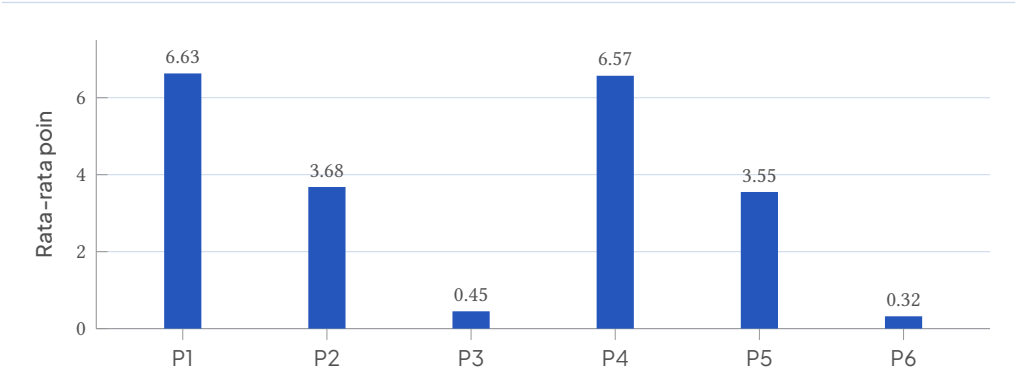
Bab penutup ini merangkum seluruh buku menjadi sebuah sistem: tesis data, rencana dua belas bulan dengan ukuran keberhasilan yang terukur, tanda bahaya yang harus diwaspadai, dan jurnal kesalahan sebagai alat umpan balik. Sistem ini sederhana; yang sulit adalah menjalankannya setiap hari.

© PETA BAB

Bab penutup ini menyusun rencana dua belas bulan, ukuran kemajuan yang dapat dipantau, tanda bahaya, dan cara memakai jurnal kesalahan, semuanya berdasarkan data IMO 2017–2026.

45.1 Tesis data

Rata-rata per peserta Indonesia (2017–2026) dibandingkan nilai maksimum 7:



Gambar 45.1. Rata-rata poin per soal, peserta Indonesia 2017–2026 (60 peserta).

Soal 1 dan 4 diselesaikan sekitar 94%, soal 2 dan 5 sekitar 51–53%, soal 3 dan 6 sekitar 4–6%. Batas rata-rata sepuluh tahun: emas 30,1, perak 23,8, perunggu 16,8. Target emas yang realistis adalah $7 + 7 + 7 + 7 + 2$ ditambah beberapa poin parsial: menaikkan P2 dan P5 dari rata-rata 3,6 menjadi 7 adalah pekerjaan utama.

45.2 Rencana dua belas bulan

Bulan	Kegiatan inti	Ukuran keberhasilan
1–3	Bab F1–F6 (bila perlu), lalu Bab 1, 2, 6, 7, 11, 12, 16, 17, 21. Semua latihan ★.	90% latihan ★ selesai dengan bukti lengkap.
4–6	Bab 3–5, 8–10, 13–15, 18–20. Latihan ★★.	Satu solusi tertulis per hari dinilai pembina $\geq 5/7$.
7–9	Bagian VI dan soal P2/P5 IMO serta olimpiade regional.	Menyelesaikan 50% soal P2/P5 dalam 2 jam.
10–12	Simulasi penuh mingguan (Bab 43), Problem Set Intensif.	Skor simulasi ≥ 28 secara konsisten.

45.3 Tanda bahaya

Waspada pola berikut: (1) sering “hampir selesai” tetapi tidak pernah menulis solusi utuh; (2) hanya mengerjakan bidang favorit; (3) membaca solusi sebelum berjuang minimal 30 menit; (4) nilai P1 simulasi di bawah 7 karena kesalahan kecil; (5) tidak ada kemajuan skor simulasi selama empat minggu.

45.4 Jurnal kesalahan

Setiap kehilangan poin dicatat dalam tabel dengan kolom: tanggal, soal, jenis kesalahan (konsep, hitung, kasus terlewat, penulisan, waktu), penyebab, dan aturan pencegahan. Tinjau jurnal setiap minggu. Aturan pencegahan yang baik bersifat operasional, misalnya: “setelah menemukan jawaban persamaan fungsional, selalu substitusikan kembali ke persamaan awal”.

45.5 Kata akhir

Emas IMO bukan hasil bakat semata, tetapi hasil ribuan jam latihan yang terarah. Data sepuluh tahun terakhir menunjukkan bahwa Indonesia sudah menguasai soal mudah; langkah berikutnya adalah menguasai soal menengah secara konsisten. Buku ini menyediakan peta jalannya. Selebihnya adalah ketekunan Anda.

Lampiran A. Kamus Teknik

Tabel ini memetakan ciri-ciri soal ke teknik yang layak dicoba lebih dulu, beserta bab tempat teknik itu dibahas.

Ciri soal	Teknik yang dicoba	Bab
Ketaksamaan simetris dengan syarat	Homogenisasi, p, q, r , Schur, SOS	1, 5
Pecahan dengan penyebut jumlah	Bentuk Engel (Titu)	1
Fungsi dengan variabel tunggal di satu ruas	Surjektif, injektif, substitusi $x = 0$	3
Fungsi pada $\mathbb{N}$	Induksi kuat, ketaksamaan yang diperkuat	3
Polinomial diketahui di banyak titik	Polinomial bantu yang bernilai nol	2
Barisan tak linear	Besaran yang tumbuh hampir konstan	4
$n \mid a^n \pm 1$	Faktor prima terkecil, orde	7
Pangkat prima dalam $a^n - b^n$	LTE	7
Persamaan kuadrat simetris dalam bilangan bulat	<i>Vieta jumping</i>	8
Persamaan tanpa solusi	Modulo 3, 4, 8, 9; <i>infinite descent</i>	8, 10
Menjepit bilangan kuadrat	Kuadrat berurutan	10
Tiga garis serentak	Ceva, sumbu radikal	11, 12
Titik konsiklis	Sudut keliling, kuasa titik	12
Panjang yang terpecar di sekitar segitiga sama sisi/persegi	Rotasi	13
O, H, G sekaligus	Vektor dengan O sebagai titik asal	14
Pusat lingkaran dalam	Titik tengah busur, lema pusat dalam–pusat singgung luar	15
“Ada dua objek yang ...”	Sarang merpati	16
Proses berulang	Invarian, monovarian	17
Relasi antarobjek	Graf, penghitungan ganda	18, 19
Permainan dua pemain	Posisi P/N, simetri, pencurian strategi	20

Lampiran B. Daftar Periksa Sebelum Menyerahkan

Periksa setiap solusi dengan pertanyaan berikut.

- (1) Apakah jawaban dinyatakan di awal dengan jelas?
- (2) Untuk soal “tentukan semua”: apakah setiap jawaban sudah diperiksa memenuhi syarat, dan apakah sudah dibuktikan tidak ada jawaban lain?
- (3) Apakah kasus kecil dan kasus batas (misalnya $n = 1$, variabel nol, kesamaan) sudah ditangani?
- (4) Apakah setiap asumsi “tanpa mengurangi keumuman” sah dan dijelaskan?
- (5) Apakah setiap pembagian dilakukan dengan bilangan tak nol, dan setiap akar kuadrat dari bilangan tak negatif?
- (6) Apakah arah ketaksamaan dijaga saat mengalikan dengan bilangan yang mungkin negatif?
- (7) Apakah gambar geometri tidak dipakai sebagai bukti (konfigurasi lain sudah dipertimbangkan)?
- (8) Apakah lema yang terbukti ditulis terpisah agar dapat memperoleh poin parsial?
- (9) Apakah halaman diberi nomor dan tulisan dapat dibaca?

Lampiran C. Daftar Rujukan

- (1) Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1998.
- (2) Paul Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving*, edisi ke-3. Wiley, 2017.
- (3) Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. MAA Press, 2016.
- (4) Titu Andreescu dan Răzvan Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser, 2009.
- (5) Titu Andreescu, Dorin Andrica, dan Zuming Feng. *104 Number Theory Problems*. Birkhäuser, 2007.
- (6) Pham Kim Hung. *Secrets in Inequalities*. GIL Publishing, 2007.
- (7) Situs resmi IMO: imo-official.org (soal, hasil, dan statistik).
- (8) Art of Problem Solving: artofproblemsolving.com (forum dan wiki kompetisi).

Lampiran D. Program Dua Belas Minggu Fase Akhir

Minggu	Fokus	Keluaran
1	Aljabar: ketaksamaan dan fungsional	6 solusi tertulis
2	Teori bilangan: orde, LTE, Diofantin	6 solusi tertulis
3	Geometri: lingkaran dan titik pusat	6 solusi tertulis
4	Kombinatorika: invarian, graf	6 solusi tertulis, simulasi 1
5	Bedah IMO 2017–2019	Tabel kesalahan
6	Bedah IMO 2020–2022	Tabel kesalahan, simulasi 2
7	Bedah IMO 2023–2026	Tabel kesalahan
8	Bidang terlemah (dari jurnal)	8 solusi tertulis, simulasi 3
9	Soal P2/P5 campuran	5 soal dalam kondisi ujian
10	Soal P3/P6: berburu poin parsial	3 soal, catat lema yang terbukti
11	Simulasi penuh dua hari	Skor dan evaluasi waktu
12	Pemulihan, tinjauan jurnal, istirahat	Daftar aturan pribadi

Lampiran E. Rubrik Penilaian 0–7

Rubrik ini membantu pembina menilai solusi latihan dengan cara yang mendekati penilaian IMO.

Nilai	Ciri solusi
7	Solusi lengkap dan benar; kekurangan kecil yang tidak memengaruhi kebenaran.
6	Solusi lengkap dengan kesalahan kecil yang mudah diperbaiki (misalnya satu kasus kecil terlewat).
5	Ide lengkap, tetapi ada celah yang memerlukan argumen tambahan yang tidak sepele.
3–4	Kemajuan substansial: lema kunci terbukti, atau satu dari dua arah soal “tentukan semua” selesai.
1–2	Kemajuan awal yang bermakna: jawaban benar dengan konstruksi, atau pengamatan kunci yang terbukti.
0	Tidak ada kemajuan yang bermakna; hanya kasus kecil atau dugaan tanpa bukti.

Lampiran F. Petunjuk Latihan

Petunjuk berikut hanya untuk soal yang diberi petunjuk. Nomor mengikuti nomor soal di setiap bab. Pembahasan lengkap semua soal ada di Lampiran H.

Bab F1 Logika, Himpunan, dan Bahasa Matematika

- F1.2** “Ada bilangan genap yang lebih dari 2 yang tidak dapat ditulis sebagai jumlah dua bilangan prima.”
- F1.3** Kontraposisi: jika a dan b rasional, maka $a + b$ rasional.
- F1.5** Arah “hanya jika” langsung. Untuk arah sebaliknya, gunakan kontraposisi: jika $n = 3k \pm 1$, maka $n^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$.
- F1.6** $|A \cup G| = 25 + 18 - 7 = 36$, jadi 4 siswa.

Bab F2 Bilangan dan Aljabar Dasar

- F2.1** $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
 $a^3 + b^3 + 3ab - 1 = (a + b - 1)(a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b)$.
- F2.2** $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = 8 + 18 = 26$.
- F2.3** Kuadratkan kedua ruas (keduanya tak negatif): $-4x + 4 \leq 8x + 16$, jadi $x \geq -1$.
- F2.4** $2(x - 2)^2 + 3$; minimum 3 di $x = 2$.
- F2.5** Tulis $x = n + f$ dengan $f \in [0, 1)$ dan pisahkan kasus $f < \frac{1}{2}$ dan $f \geq \frac{1}{2}$.
- F2.6** Diskriminan negatif: $4m^2 - 4(m + 6) < 0$, yaitu $-2 < m < 3$.

Bab F3 Fungsi

- F3.1** $\frac{x-1}{3-x} \geq 0$ dan $x \neq 3$: $1 \leq x < 3$.
- F3.2** $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$, $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 8$, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.
- F3.3** Injektif; tidak surjektif karena bilangan genap tidak tercapai.
- F3.4** $f\left(\frac{T}{2}\right) = f\left(-\frac{T}{2} + T\right) = f\left(-\frac{T}{2}\right) = -f\left(\frac{T}{2}\right)$.
- F3.5** Dengan $t = 2^x > 0$: $t^2 - 6t + 8 = 0$, jadi $t = 2$ atau $t = 4$, yaitu $x = 1$ atau $x = 2$.
- F3.6** Untuk contoh, ambil $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ dan g yang memetakan 1 dan 2 ke nilai yang sama.

Bab F4 Notasi Sigma, Deret, dan Induksi

F4.1 $3 \cdot 210 - 40 = 590$ dan $385 + 55 = 440$.

F4.3 $(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3n(n+1)$, dan $n(n+1)$ genap.

F4.5 Keduanya teleskopik: $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ dan $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

F4.6 Basis $n = 1, 2$; langkah: $3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) = 2^{n+2} - 1$.

Bab F5 Kombinatorika Dasar dan Peluang

F5.1 $P(10, 3) = 720$ dan $\binom{10}{3} = 120$.

F5.2 $\binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot (-1)^3 = -160$.

F5.3 $\binom{11}{3} = 165$.

F5.4 Inklusi-eksklusi dengan 2, 3, 5: $100 - (50 + 33 + 20) + (16 + 10 + 6) - 3 = 26$.

F5.5 Gabungkan keduanya menjadi satu blok: $6! \cdot 2 = 1440$.

F5.6 $\frac{\binom{6}{3}}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$. Karena simetri, peluang "lebih banyak angka" adalah $\frac{1-5/16}{2} = \frac{11}{32}$.

Bab F6 Geometri dan Trigonometri Dasar

F6.1 $\frac{(n-2)180}{n} = 144$, jadi $n = 10$.

F6.2 Lengkapi menjadi persegi panjang; diagonal-diagonalnya sama panjang dan saling membagi dua.

F6.3 $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, dan $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ sehingga jumlahnya 1.

F6.4 Kejar sudut: $\angle DBC = 36^\circ$, $\angle BDC = 72^\circ$. Segitiga ABC dan BCD sebangun; dengan $BC = 1$ dan $AB = x$ diperoleh $x^2 = x + 1$, jadi $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

F6.5 Tinggi terhadap sisi a adalah $b \sin \gamma$. Maksimum 20 saat $\gamma = 90^\circ$.

F6.6 Dengan $\theta = 18^\circ$, $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, yaitu $2 \sin \theta \cos \theta = \cos 3\theta = \cos \theta(1 - 4 \sin^2 \theta)$. Bagi dengan $\cos \theta$: $4s^2 + 2s - 1 = 0$.

Bab 1 Ketaksamaan

1.1 Tulis ekspresinya sebagai $t + \frac{1}{t}$ dengan $t = \sqrt{x^2 + 2} \geq \sqrt{2}$. Fungsi $t + \frac{1}{t}$ naik untuk $t \geq 1$, sehingga minimumnya $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, tercapai di $x = 0$.

1.3 Gunakan QM-AM dua kali: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 2$, lalu $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq 2$.

1.4 Tulis $\frac{a^2}{a+b^2} = a - \frac{ab^2}{a+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b\sqrt{a}} = a - \frac{b\sqrt{a}}{2}$ (AM-GM di penyebut). Tinggal membuktikan $\sum b\sqrt{a} \leq 3$: dengan Cauchy-Schwarz, $\sum \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab} \leq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \leq \sqrt{3 \cdot 3}$.

1.5 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ dan $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, sehingga $\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x + y + z$.

1.6 AM-GM: $\frac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3a$. Jumlahkan secara siklis.

1.7 Karena bentuknya siklis, putar variabel sehingga b bernilai tengah. Ruas kiri $\leq b(a+c)^2$ karena selisihnya $c(a-b)(b-c) \geq 0$. Lalu AM-GM pada $b \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2}$. Lihat juga Bab 21.

- 1.8** Tunjukkan $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$. Setelah dikuadratkan, ini setara dengan $(a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3})^2 - a^{8/3} \geq 8a^{2/3}bc$; ruas kiri adalah $(b^{4/3} + c^{4/3})(2a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3})$, lalu gunakan AM-GM pada tiap faktor.

Bab 2 Polinomial

- 2.1** $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, jadi $x^3 \equiv 1$ modulo $x^2 + x + 1$. Karena $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, sisanya x .
- 2.2** Nilainya $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{-1} = -1$.
- 2.3** Untuk n bulat, $P(n) \equiv P(0)$ atau $P(1)$ modulo 2 bergantung pada paritas n , sehingga $P(n)$ ganjil dan tidak nol.
- 2.4** $R(x) = P(x) - x^2$ memenuhi $R(x + 1) = R(x)$, sehingga $R(n) = R(0) = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Polinomial dengan tak hingga akar adalah nol, jadi $P(x) = x^2$.
- 2.5** $P(x) = \sum_{j=0}^n \binom{x}{j}$ memenuhi syarat (karena $\sum_j \binom{k}{j} = 2^k$ untuk $k \leq n$). Jadi $P(n + 1) = \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} = 2^{n+1} - 1$.
- 2.6** Dari lema, $a - b \mid b - c$, $b - c \mid c - a$, $c - a \mid a - b$, sehingga ketiga selisih memiliki nilai mutlak sama $d > 0$. Tetapi tiga bilangan bernilai $\pm d$ tidak mungkin berjumlah 0.
- 2.8** Andaikan $f = gh$; karena $g(0)h(0) = 3$, misalkan $|g(0)| = 1$. Setiap akar α dari f memenuhi $|\alpha|^{n-1}|\alpha+5| = 3$. Hasil kali atas akar-akar g memberi $|g(-5)| = \prod |\alpha+5| = 3^{\deg g}$. Namun $g(-5) \mid f(-5) = 3$, jadi $\deg g = 1$ dan g memberi akar bulat ± 1 ; periksa bahwa $f(\pm 1) \neq 0$.

Bab 3 Persamaan Fungsional

- 3.1** Ganti x dengan $-x$ lalu eliminasi $f(-x)$. Jawaban: $f(x) = x^3 + 1$.
- 3.2** Ganti x dengan $\frac{1}{x}$ dan selesaikan sistem dua persamaan. Jawaban: $f(x) = \frac{2}{x} - x$.
- 3.3** $f(n + 1) = f(f(f(n))) = f(n) + 1$, jadi $f(n) = n + c$. Maka $f(f(n)) = n + 2c$, sehingga $2c = 1$, mustahil untuk bilangan bulat.
- 3.4** $g(x) = f(x) - x^2$ aditif dan kontinu, jadi $g(x) = cx$. Jawaban: $f(x) = x^2 + cx$.
- 3.5** Dengan $x = 1$, f surjektif; pilih y_0 dengan $f(y_0) = -1$. Substitusi $y = y_0$ memberi $f(0) = xy_0 + f(x)$, jadi f linear. Substitusikan $f(x) = kx + m$. Jawaban: $f(x) = x$ dan $f(x) = -x$.
- 3.6** Bagian pertama: induksi memberi $f(n) = nf(1)$. Bagian kedua: $f(1) = 1$; tunjukkan $f(n) = n$ untuk $n = 2^k$, lalu karena f naik tegas dan $2^k < n < 2^{k+1}$ hanya memuat $2^k - 1$ bilangan asli di antaranya, nilai f terjepit.
- 3.7** Tunjukkan f bijektif dan $f(0) = 0$. Maka $f(f(y)) = y$ dan $f(x^2) = f(x)^2$, sehingga $f(t + y) = f(t) + f(y)$ untuk $t \geq 0$ dan $f(t) \geq 0$ untuk $t \geq 0$. Jadi f aditif dan naik; gunakan Teorema 3.3. Jawaban: $f(x) = x$.

Bab 4 Barisan dan Rekurensi

- 4.1** $a_n = 2^n + 3^n$.
- 4.2** $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.
- 4.3** Rasionalkan: setiap suku sama dengan $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Jumlahnya $\sqrt{100} - 1 = 9$.
- 4.4** $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$, lalu teleskopik.
- 4.5** $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n$, jadi $\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ dan $a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$.
- 4.6** Jika $x = t + \frac{1}{t}$ maka $x^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Mulai dengan $t = 2$. Karena $0 < 2^{-2^n} < 1$, $\lfloor x_n \rfloor = 2^{2^n}$.
- 4.7** $\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$, lalu teleskopik.
- 4.8** $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2$ untuk semua n . Kurangkan dua persamaan berurutan untuk memperoleh $\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}$, konstan = 4. Jadi $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$.

Bab 5 Aljabar Simetris

- 5.1** $x^2 + y^2 = 19$, lalu $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 361 - 18 = 343$.
- 5.2** $q = -\frac{1}{2}$, $\sum a^2b^2 = q^2 - 2pr = \frac{1}{4}$, sehingga $\sum a^4 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
- 5.3** Jumlah Newton memberi $e_2 = 3$ dan $e_3 = 1$, sehingga x, y, z akar $(t-1)^3$. Satu-satunya solusi $x = y = z = 1$.
- 5.4** Syaratnya setara dengan $pq = r$, yaitu $(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r = 0$.
- 5.5** Untuk n genap bilangannya genap dan lebih dari 2. Untuk $n = 2k + 1$, tulis $n^4 + 4 \cdot (2^k)^4$ dan gunakan Sophie Germain. Jawaban: $n = 1$.
- 5.6** $b + c = 6 - a$ dan $bc = 9 - a(6 - a)$. Syarat b, c real, yaitu $(b+c)^2 \geq 4bc$, memberi $3a(4-a) \geq 0$.
- 5.8** $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(z+x)$, sehingga $(3-x)(3-y)(3-z) = 8$ dengan jumlah faktor 6. Periksa faktorisasi 8. Jawaban: $(1, 1, 1)$ dan permutasi $(-5, 4, 4)$.

Bab 6 Keterbagian

- 6.1** $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!} = \binom{n+k}{k}$ bilangan bulat.
- 6.2** $3040 = 2026 + 1014$, $2026 = 1014 + 1012$, $1014 = 1012 + 2$, $1012 = 506 \cdot 2$. Jadi FPB-nya 2, dan melacak mundur memberi $2 = 2 \cdot 3040 - 3 \cdot 2026$.
- 6.3** $12 = 12$, $6 \cdot 2$, $4 \cdot 3$, $3 \cdot 2 \cdot 2$. Bentuk $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ memberi yang terkecil.
- 6.4** $n^2 + 1 = (n+1)(n-1) + 2$, jadi $n+1 \mid 2$. Jawaban: $n = 1$.
- 6.5** $(2n)! = 2^n n! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$. Untuk bagian kedua: $v_2\binom{2n}{n} = n - v_2(n!) \geq 1$ karena $v_2(n!) \leq n-1$.
- 6.6** $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
- 6.7** Misalkan $b \geq a$. Dari $b^2 - a \mid a^2 + b$ diperoleh $b^2 - a \leq a^2 + b$, yaitu $(b-a)(b+a) \leq a+b$, sehingga $b = a$ atau $b = a+1$. Periksa kedua kasus; jawaban: $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

Bab 7 Kongruensi

- 7.1** $3^{10} = 59049 \equiv 49$, jadi $3^{20} \equiv 49^2 \equiv 1 \pmod{100}$. Karena $2026 \equiv 6 \pmod{20}$, jawabannya $3^6 = 729$, yaitu 29.
- 7.2** $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n$ dan $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$ modulo 7.
- 7.3** Invers 7 modulo 11 adalah 8, jadi $x \equiv 24 \equiv 2 \pmod{11}$.
- 7.4** $2 \equiv -1 \pmod{3}$. Periksa n genap dan ganjil. Jawaban: $n \equiv 1$ atau $2 \pmod{6}$.
- 7.6** $2^{2^n} \equiv -1$ dan $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$, jadi $\text{ord}_p(2) = 2^{n+1}$, yang membagi $p-1$.
- 7.7** LTE: $v_3(10-1) + v_3(81) = 2 + 4 = 6$.
- 7.8** Jika $p = 2$ dan q ganjil: $2^q \equiv 2 \pmod{q}$, jadi $q \mid 4 + 2 = 6$. Jika keduanya ganjil: $2^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$, sehingga $v_2(\text{ord}_p 2) = v_2(q-1) + 1 \leq v_2(p-1)$. Secara simetris $v_2(p-1) < v_2(q-1)$, kontradiksi. Jawaban: $(2, 2), (2, 3), (3, 2)$.

Bab 8 Persamaan Diofantin

- 8.2** $(x-6)(y-6) = 36$, dan kedua faktor harus positif. Banyaknya $\tau(36) = 9$.
- 8.3** Selisih dua kuadrat tidak pernah $\equiv 2 \pmod{4}$.
- 8.4** Jika $y \geq 2$, modulo 4 memberi x genap, $x = 2m$, dan $(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^y$. Dua pangkat 2 yang berselisih 2 hanyalah 2 dan 4. Jawaban: $(1, 1)$ dan $(2, 3)$.
- 8.5** $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ setara dengan $(2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1$. Gunakan solusi Pell $(3, 2), (17, 12), (99, 70)$. Jawaban: $n = 1, 8, 49$.
- 8.6** Buktikan pernyataan yang lebih kuat: $x^2 + y^2 + z^2 = 2^k xyz$ dengan $k \geq 1$ hanya memiliki solusi nol. Modulo 4 memaksa ketiganya genap, dan membagi dua mengubah k menjadi $k+1$.
- 8.7** *Vieta jumping* seperti IMO 1988: turun ke pasangan minimal. Pada pasangan minimal $b = 1$ (atau $a = b$ yang mudah dieliminasi), dan $a-1 \mid a^2 + 1$ memberi $a-1 \mid 2$, yaitu $(a, b) \in \{(2, 1), (3, 1)\}$, keduanya menghasilkan 5.

Bab 9 Bilangan Prima

- 9.1** Untuk $p \neq 3$, $8p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Untuk $p = 3$ diperoleh 73. Jawaban: $p = 3$.
- 9.2** Periksa modulo 3: $p, p+10 \equiv p+1, p+14 \equiv p+2$ mencakup semua sisa. Jawaban: $p = 3$.
- 9.3** Tiru bukti untuk $4k+3$ dengan $N = 6q_1 \cdots q_m - 1$.
- 9.4** Modulo 3 memaksa $p = 3$, dan $3^3 + 4 = 31$.
- 9.5** $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$. Jawaban: $n = 1$.
- 9.7** Untuk $p = 2$ nilainya bukan bulat. Untuk p ganjil tulis $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = pm^2$; kedua faktor ganjil dan relatif prima, sehingga salah satunya kuadrat sempurna dan yang lain p kali kuadrat. Periksa modulo 4: $2^k + 1$ bukan kuadrat untuk $k \geq 1$ kecuali $k = 3$, dan $2^k - 1$ kuadrat hanya bila $k = 1$. Jawaban: $p = 3$ dan $p = 7$.

Bab 10 Kuadrat dan Pangkat

- 10.1** Jumlahnya $5(n^2 + 2)$. Kuadrat memerlukan $5 \mid n^2 + 2$, padahal $n^2 \not\equiv 3 \pmod{5}$.
- 10.2** Dua digit terakhirnya 26, sehingga $\equiv 2 \pmod{4}$.
- 10.3** Untuk $n \geq 1$ bilangan itu terjepit di antara n^2 dan $(n+1)^2$; untuk $n \leq -2$ di antara $(n+1)^2$ dan n^2 . Jawaban: $n = 0$ dan $n = -1$.
- 10.4** Jepit di antara $(n^2 + n)^2$ dan $(n^2 + n + 1)^2$.
- 10.5** Modulo 3 memaksa n genap. Untuk $n = 2m$ dengan $m \geq 1$, modulo 5: $4^m + 9^m \equiv 2(-1)^m \in \{2, 3\}$, bukan sisa kuadrat. Tidak ada solusi.
- 10.6** Modulo 3 memaksa y genap, $y = 2k$. Maka $(2^k - x)(2^k + x) = 615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$. Jawaban: $(59, 12)$.
- 10.7** Jelas $x > y$; tulis $x = y + d$. Maka $(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 - 61 = 0$. Untuk $d \geq 4$ ruas kiri positif; periksa $d = 1, 2, 3$. Jawaban: $(6, 5)$.
- 10.8** Untuk $x \geq 1$, tulis $2^x(1 + 2^{x+1}) = (y - 1)(y + 1)$ dengan y ganjil positif; salah satu faktor $\equiv 2 \pmod{4}$, sehingga faktor yang lain habis dibagi 2^{x-1} . Tulis $y = 2^{x-1}m \pm 1$ dengan m ganjil, substitusikan, dan batasi m . Jawaban: $(0, \pm 2)$ dan $(4, \pm 23)$.

Bab 11 Segitiga Klasik

- 11.1** $s = 12$, $\Delta = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$, $R = \frac{504}{48\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$.
- 11.3** Garis tinggi $= \frac{2 \cdot 84}{14} = 12$. Garis berat: $m_a^2 = \frac{2 \cdot 169 + 2 \cdot 225 - 196}{4} = 148$, jadi $m_a = 2\sqrt{37}$.
- 11.4** Stewart dengan $m = \frac{ac}{b+c}$ dan $n = \frac{ab}{b+c}$.
- 11.5** $BD = s - c$ dan $DC = s - b$; gunakan Ceva.
- 11.7** Ketiga segitiga kecil sebangun dengan ABC dengan rasio $\frac{x_i}{a}$, dan alas-alasnya yang terletak pada BC (setelah digeser sejajar) berjumlah a . Jadi $\sum \sqrt{\Delta_i/\Delta} = \sum \frac{x_i}{a} = 1$.

Bab 12 Lingkaran

- 12.1** $PT^2 = PA \cdot PB = 4 \cdot 9$, jadi $PT = 6$.
- 12.3** Ptolemy: $3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 39$.
- 12.4** Tali busur sama panjang menghadap sudut keliling sama: $\angle ADB = \angle BDC$.
- 12.5** Garis singgung persekutuan di T memotong AB di M ; maka $MA = MT = MB$.
- 12.7** Misalkan F kaki tegak lurus dari E ke AB . Maka B, C, E, F konsiklis dan A, D, E, F konsiklis (sudut siku-siku). Kuasa titik memberi $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ dan $BE \cdot BD = BF \cdot BA$.

Bab 13 Transformasi Geometri

- 13.1** Pantulkan A ke $A'(0, -3)$. Nilai minimumnya $A'B = \sqrt{36 + 64} = 10$, dicapai di $P(\frac{9}{4}, 0)$.
- 13.3** Gunakan bilangan kompleks: dengan $\omega = e^{2\pi i/3}$, pusat segitiga pada sisi BC adalah kombinasi linear B dan C . Periksa kriteria $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ dari Bab 14.
- 13.4** Perpanjang AM hingga N dengan $AM = MN$, sehingga $ABNC$ jajaran genjang. Segitiga ABN dan EAG kongruen (sisi-sudut-sisi: $AB = EA$, $BN = AC = AG$, $\angle ABN = 180^\circ - \angle BAC = \angle EAG$). Jadi $EG = AN = 2AM$; karena $AB \perp EA$ dan $BN \perp AG$, sisi-sisi yang bersesuaian tegak lurus, sehingga $AN \perp EG$.
- 13.6** Rotasi 90° terhadap B yang memetakan C ke A membawa P ke P' dengan $BP' = 2$, $PP' = 2\sqrt{2}$, $AP' = 3$. Karena $1^2 + (2\sqrt{2})^2 = 3^2$, $\angle APP' = 90^\circ$. Jawaban: 135° .

Bab 14 Koordinat, Vektor, dan Bilangan Kompleks

- 14.1** Tali sepatu: $\frac{1}{2}(0 + 12 + 17 + 0) = \frac{29}{2}$.
- 14.2** $\frac{A+B}{2} - \frac{B+C}{2} = \frac{A-C}{2} = \frac{D+A}{2} - \frac{C+D}{2}$.
- 14.3** Ambil pusat persegi panjang sebagai titik asal: $C = -A$, $D = -B$, dan $|A| = |B|$.
- 14.4** Gunakan $a = 2R \sin A$: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ memberi $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$.
- 14.5** Leibniz: minimum di $P = G$.
- 14.6** Titik tingginya $b + c + d = s - a$ dan seterusnya, dengan $s = a + b + c + d$. Pemetaan $z \mapsto s - z$ adalah pencerminan titik, jadi isometri.

Bab 15 Titik-Titik Pusat Segitiga

- 15.1** $R = \frac{13}{2}$, $r = \frac{5+12-13}{2} = 2$, $OI^2 = \frac{169}{4} - 26 = \frac{65}{4}$.
- 15.3** $AH = 2 OM_a$ dan $OM_a = R|\cos A|$.
- 15.4** Keduanya sama dengan $90^\circ - B$ (untuk segitiga lancip).
- 15.6** A terletak pada $I_B I_C$ (garis bagi luar di A) dan $AI_A \perp I_B I_C$. Jadi A, B, C adalah kaki garis tinggi segitiga $I_A I_B I_C$.

Bab 16 Prinsip Sarang Merpati

- 16.1** Kotak menurut sisa modulo 10: $\{0\}, \{5\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$.
- 16.2** Jika ketiga sisa 0, 1, 2 muncul, pilih satu dari masing-masing. Jika tidak, 5 bilangan terbagi ke 2 kelas sisa, sehingga ada 3 bilangan bersisa sama.
- 16.3** Ada $2^{10} - 1 = 1023$ himpunan bagian tak kosong, tetapi jumlahnya paling banyak 990. Buang unsur persekutuan dari dua himpunan dengan jumlah sama.
- 16.4** Di antara $3^1, \dots, 3^{1001}$ ada dua yang kongruen modulo 1000; bagi dengan pangkat 3 yang lebih kecil.
- 16.5** Pandang 1, 11, 111, ... ($n + 1$ bilangan) modulo n dan ambil selisih dua yang bersisa sama.
- 16.6** Bagi menjadi 25 persegi bersisi $\frac{1}{5}$. Lingkaran luar persegi kecil berjari-jari $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$.
- 16.7** Misalkan a_i total partai sampai hari ke- i ; maka $1 \leq a_1 < \dots < a_{77} \leq 132$. Pandang 154 bilangan a_i dan $a_i + 21$, semuanya di $\{1, \dots, 153\}$.

Bab 17 Invarian dan Monovarian

- 17.1** Jumlah kuadrat invarian: $50 \neq 53$.
- 17.2** $\prod(x+1)$ invarian, karena $(a+b+ab)+1=(a+1)(b+1)$. Jawaban: $11!-1=39\,916\,799$.
- 17.3** Warnai petak (i, j) dengan warna $i+j \bmod 4$. Setiap ubin menutup satu petak dari setiap warna, tetapi banyak petak per warna tidak sama.
- 17.4** Paritas jumlah invarian, jadi perlu $\frac{n(n+1)}{2}$ genap, yaitu $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$. Tunjukkan dengan konstruksi (kelompok empat bilangan $k, k+1, k+2, k+3$) bahwa syarat ini cukup.
- 17.5** Warnai titik sudut bergantian; selisih jumlah warna hitam dan putih invarian dan mula-mula 1. Jadi tidak pernah.
- 17.6** Besaran $f = \sum_i (x_i - x_{i+2})^2$ (indeks modulo 5) bilangan bulat tak negatif dan berkurang sebesar $-2yS > 0$ setiap langkah, dengan S jumlah kelima bilangan.

Bab 18 Teori Graf

- 18.2** Jumlah derajat 15 ganjil.
- 18.3** Seorang ilmuwan berkorespondensi dengan 16 orang, jadi paling sedikit 6 orang tentang topik yang sama. Terapkan argumen 6 orang pada mereka.
- 18.5** Induksi: sisipkan tim baru tepat sebelum tim pertama yang dikalahkannya dalam urutan yang ada.
- 18.6** Pilih pembagian titik menjadi dua bagian yang memaksimumkan banyak sisi antarbagian. Pada pembagian itu setiap titik memiliki paling sedikit setengah tetangganya di bagian lain.

Bab 19 Penghitungan Ganda

- 19.2** Vandermonde dengan $m = n = k$ dan $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- 19.3** Setiap bilangan muncul di 2^{n-1} himpunan bagian.
- 19.4** $w_i + l_i = n - 1$ dan $\sum w_i = \sum l_i$, sehingga $\sum (w_i^2 - l_i^2) = (n-1) \sum (w_i - l_i) = 0$.
- 19.5** Hitung pasangan unsur yang termuat dalam suatu A_i : setiap A_i memuat 3 pasangan dan setiap pasangan termuat di paling banyak satu A_i .
- 19.6** Kedua ruas menghitung pasangan (permutasi, titik tetapnya). Setiap i adalah titik tetap dari tepat $(n-1)!$ permutasi.

Bab 20 Permainan dan Strategi

- 20.1** Posisi P adalah kelipatan 6. Karena $2026 \equiv 4 \pmod{6}$, ambil 4 batu.
- 20.2** 1, 2, 4 bersisa 1, 2, 1 modulo 3. Posisi P adalah kelipatan 3.
- 20.3** $3 \oplus 5 \oplus 7 = 1$, jadi pemain pertama menang, misalnya dengan mengubah tumpukan 3 menjadi 2.
- 20.4** Ini Nim dua tumpukan sama besar. Pemain kedua menang dengan menjaga benteng di diagonal.
- 20.6** Pencurian strategi dengan langkah “hapus 1”: jika pemain kedua menang dengan jawaban X , pemain pertama dapat memilih X sejak awal, karena 1 membagi X .

Bab 21 Sepuluh Teknik Pembuktian

- 21.1** Jika $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ rasional, maka $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$ rasional.
- 21.4** Salah; Euler menemukan $641 \mid 2^{32} + 1$. Periksa: $641 = 5 \cdot 2^7 + 1 = 2^4 + 5^4$.
- 21.5** Induksi kuat: kurangkan bilangan Fibonacci terbesar yang tidak melebihi n ; sisanya lebih kecil dari bilangan Fibonacci sebelumnya.
- 21.6** Di antara semua pasangan (titik P , garis ℓ melalui paling sedikit dua titik, $P \notin \ell$), pilih yang jarak P ke ℓ minimum. Jika ℓ memuat tiga titik, dua di antaranya berada di sisi yang sama dari kaki tegak lurus P , dan salah satunya memberi pasangan dengan jarak lebih kecil.

Bab 44 Problem Set Intensif

- 44.1** Untuk $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- 44.2** Substitusi $x = 0$: $f(y) = f(0) + y$.
- 44.3** AM-GM: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$. Jumlahkan secara siklis.
- 44.4** Barisan $x_0 = 0$, $x_{k+1} = x_k^2 + 1$ memberi tak hingga titik dengan $P(x_k) = x_k$. Jawaban: $P(x) = x$.
- 44.5** Buktikan $(b^2+2)(c^2+2) \geq 3\left(1 + \frac{(b+c)^2}{2}\right)$ (selisihnya $(bc-1)^2 + \frac{(b-c)^2}{2}$), lalu Cauchy-Schwarz: $(a^2+2)\left(1 + \frac{(b+c)^2}{2}\right) \geq (a+b+c)^2$.
- 44.6** Tunjukkan $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^2-1/x}{x^2+y^2+z^2}$ (selisihnya sebanding dengan $x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)$), lalu $\frac{1}{x} \leq yz \leq \frac{y^2+z^2}{2}$.
- 44.7** Fermat untuk 2, 3, 5.
- 44.8** $2 \equiv -1 \pmod{3}$. Jawaban: n ganjil.
- 44.9** Untuk $p \geq 5$, $12 \mid p^2 + 11$ dan $p^2 + 11 > 12$, sehingga banyak pembaginya lebih dari 6. Jawaban: $p = 3$.
- 44.10** $F_0 F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2$.
- 44.11** Untuk $n \geq 10$, $n! + 5 \equiv 5 \pmod{25}$, bukan kuadrat. Periksa $n \leq 9$. Tidak ada solusi.
- 44.12** Pandang $a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0$ sebagai persamaan kuadrat dalam a dan gunakan Vieta. Jawaban: $(2k, 1)$, $(k, 2k)$, $(8k^4 - k, 2k)$.
- 44.13** Pusat di $(\frac{1}{2}, y)$ dengan $1 - y = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2}$. Jawaban: $\frac{5}{8}$.
- 44.15** Kuasa titik D terhadap lingkaran berpusat A berjari-jari AB , atau teorema Stewart.
- 44.16** Kejar sudut: garis itu membuat sudut sama dengan PA dan PD seperti pada segitiga siku-siku APD , sehingga memotong AD di titik yang berjarak sama ke A, P, D .
- 44.17** Misalkan D' titik diametral D pada lingkaran dalam; A, D', E segaris dengan E titik singgung lingkaran singgung luar pada BC (homoteti di A). Titik tengah BC adalah titik tengah DE , dan I titik tengah DD' .
- 44.18** Lema pusat dalam–pusat singgung luar: pusat lingkaran dalam ABC dan DBC berjarak sama ke titik tengah busur BC . Kejar sudut untuk memperoleh sudut siku-siku.
- 44.19** Bintang dan batang: $\binom{13}{3} = 286$.

- 44.20** Setiap empat titik sudut menentukan tepat satu titik potong: $\binom{n}{4}$.
- 44.21** Setiap kolom memuat dua petak sewarna; ada $3 \cdot 2 = 6$ kemungkinan (pasangan baris, warna) untuk 7 kolom.
- 44.22** Graf tanpa siklus adalah hutan, dan hutan dengan n titik memiliki paling banyak $n - 1$ sisi.
- 44.23** Jumlah kuadrat berkurang sebesar $2(y - x - 1) > 0$, dan jumlahnya tetap sehingga jumlah kuadrat terbatas bawah.
- 44.24** Semua bilangan berparitas sama (jumlah dikurangi setiap bilangan genap). Kurangi semua bilangan dengan bilangan terkecil dan bagi dua; sifatnya dipertahankan. *Infinite descent*.

Lampiran G. Glosarium

Glosarium ini memuat istilah-istilah penting yang dipakai di seluruh buku, disusun menurut abjad. Angka dalam kurung menunjuk bab tempat istilah itu dibahas secara rinci.

A

Akar satuan (Bab 2) Bilangan kompleks ω dengan $\omega^n = 1$. Rata-rata $f(1), f(\omega), \dots, f(\omega^{n-1})$ menyaring koefisien polinomial yang indeksnya kelipatan n .

Algoritma Euclid (Bab 6) Cara menghitung $\text{FPB}(a, b)$ dengan mengulang $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, a \bmod b)$ sampai sisanya nol.

AM-GM (Bab 1) Ketaksamaan rata-rata aritmetika $\geq$ rata-rata geometrik untuk bilangan positif, dengan kesamaan jika semua bilangan sama.

Analisis kasus (Bab 21) Teknik bukti dengan membagi semua kemungkinan menjadi kasus-kasus yang lengkap dan menangani masing-masing.

B

Barisan aritmetika / geometri (Bab F4) Barisan dengan selisih berurutan tetap / rasio berurutan tetap.

Bézout, identitas (Bab 6) Untuk bilangan bulat a, b ada x, y dengan $ax + by = \text{FPB}(a, b)$.

Bijektif (Bab F3) Fungsi yang injektif sekaligus surjektif; tepat fungsi yang memiliki invers.

Bintang dan batang (Bab F5) Metode menghitung solusi $x_1 + \dots + x_r = n$ dalam bilangan bulat tak negatif: $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Binomial, koefisien (Bab F5) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, banyak cara memilih k objek dari n ; muncul dalam $(x + y)^n$.

C

Cauchy, persamaan (Bab 3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Di $\mathbb{Q}$ solusinya $f(x) = cx$; di $\mathbb{R}$ perlu syarat tambahan (monoton, kontinu).

Cauchy–Schwarz (Bab 1) $(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) \geq (\sum a_i b_i)^2$.

Ceva, teorema (Bab 11) Tiga garis dari titik sudut ke sisi di hadapannya serentak jika dan hanya jika hasil kali tiga perbandingan ruasnya 1.

D

Descent (*infinite descent*) (Bab 8, 21) Bukti ketiadaan solusi dengan menunjukkan setiap solusi menghasilkan solusi bilangan asli yang lebih kecil.

Diofantin, persamaan (Bab 8) Persamaan yang dicari solusinya dalam bilangan bulat.

Diskriminan (Bab F2) $D = b^2 - 4ac$ untuk $ax^2 + bx + c$; menentukan banyak akar real.

E

Engel, bentuk (lema Titu) (Bab 1) $\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}$ untuk $y_i > 0$.

Euler, fungsi φ (Bab 7) Banyak bilangan di $\{1, \dots, n\}$ yang relatif prima dengan n ; $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ bila $\text{FPB}(a, n) = 1$.

Euler, garis (Bab 13, 15) Garis yang memuat O, G, H dengan $GH = 2 OG$.

Euler, rumus OI^2 (Bab 15) $OI^2 = R^2 - 2Rr$; akibatnya $R \geq 2r$.

Euler, sirkuit (Bab 18) Sirkuit yang melalui setiap sisi graf tepat sekali; ada pada graf terhubung jika dan hanya jika semua derajat genap.

Ekstremal, prinsip (Bab 21) Memilih objek yang terbesar, terkecil, atau terjauh untuk memperoleh informasi tambahan.

F

Fermat kecil, teorema (Bab 7) Untuk prima p dan $p \nmid a$, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

FPB dan KPK (Bab 6) Faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil; $\text{FPB}(a, b) \text{KPK}(a, b) = ab$.

Fungsi bagian bulat (Bab F2) $[x]$, bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi x .

G

Graf (Bab 18) Himpunan titik dan sisi yang menghubungkan pasangan titik.

Garis bagi, teorema (Bab 11) Garis bagi sudut A membagi BC dengan perbandingan $AB : AC$.

H

Homoteti (Bab 13) Transformasi $P \mapsto O + k(P - O)$; memetakan garis ke garis sejajar dan lingkaran ke lingkaran.

Heron, rumus (Bab 11) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

I

Induksi matematika (Bab F4) Bukti untuk semua $n \geq n_0$ melalui basis dan langkah induksi; induksi kuat memakai semua kasus sebelumnya.

Injektif (Bab F3) Fungsi yang tidak memetakan dua masukan berbeda ke keluaran yang sama.

Inklusi-eksklusi (Bab F5) $|A \cup B \cup C| = \sum |A| - \sum |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$, dan perumumannya.

Invarian (Bab 17) Besaran yang tidak berubah oleh operasi dalam sebuah proses.

Inversi (Bab 13) Transformasi yang memetakan P ke P^* pada sinar OP dengan $OP \cdot OP^* = k^2$.

J

Jensen, ketaksamaan (Bab 1) Untuk f konveks, f dari rata-rata $\leq$ rata-rata f .

K

Kongruensi (Bab 7) $a \equiv b \pmod{n}$ berarti $n \mid a - b$.

Kontraposisi (Bab F1) $\neg Q \Rightarrow \neg P$, setara dengan $P \Rightarrow Q$.

Kuasa titik (Bab 12) Kuasa(P, ω) = $PO^2 - r^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ untuk garis melalui P yang memotong ω di A, B .

Kuantor (Bab F1) Simbol $\forall$ (untuk setiap) dan $\exists$ (ada).

L

Legendre, rumus (Bab 6) $v_p(n!) = \sum_{i \geq 1} \lfloor n/p^i \rfloor$.

Lema Euclid (Bab 6) Jika $a \mid bc$ dan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka $a \mid c$.

Lingkaran sembilan titik (Bab 13, 15) Lingkaran berjari-jari $\frac{R}{2}$ yang melalui titik tengah sisi, kaki garis tinggi, dan titik tengah AH, BH, CH .

LTE (*lifting the exponent*) (Bab 7) Untuk prima ganjil $p \mid a - b$, $p \nmid ab$: $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$.

M

Menelaus, teorema (Bab 11) Kriteria kesegarisan tiga titik pada garis-garis sisi segitiga.

Monovarian (Bab 17) Besaran yang selalu berubah ke satu arah; dipakai untuk membuktikan proses berhenti.

N

Nim (Bab 20) Permainan tumpukan batu; posisi kalah tepat ketika XOR ukuran tumpukan nol.

O

Orde (Bab 7) $\text{ord}_n(a)$, bilangan asli terkecil d dengan $a^d \equiv 1 \pmod{n}$; $a^m \equiv 1 \iff \text{ord}_n(a) \mid m$.

P

Pell, persamaan (Bab 8) $x^2 - dy^2 = 1$ dengan d bukan kuadrat; memiliki tak hingga banyak solusi.

Pencurian strategi (Bab 20) Argumen bahwa pemain kedua tidak mungkin memiliki strategi menang karena pemain pertama dapat “mencurinya”.

Penghitungan ganda (Bab 19) Menghitung satu himpunan dengan dua cara untuk memperoleh persamaan atau ketaksamaan.

Permutasi dan kombinasi (Bab F5) Susunan berurutan dan pilihan tanpa urutan.

Persamaan fungsional (Bab 3) Persamaan yang tak diketahuinya berupa fungsi.

Persamaan karakteristik (Bab 4) Persamaan $x^2 - px - q = 0$ untuk rekurensi $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$.

Pohon (Bab 18) Graf terhubung tanpa siklus; dengan n titik memiliki $n - 1$ sisi.

Posisi P dan N (Bab 20) Posisi yang kalah (P) atau menang (N) bagi pemain yang akan melangkah.

Ptolemy, teorema (Bab 12) Pada segi empat talibusur, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

R

Ramsey (Bab 18) Dari 6 orang selalu ada 3 yang saling kenal atau 3 yang saling tidak kenal ($R(3, 3) = 6$).

S

Sarang merpati, prinsip (Bab 16) Jika n benda masuk k kotak, ada kotak berisi paling sedikit $\lceil n/k \rceil$ benda.

Schur, ketaksamaan (Bab 1) $\sum a(a-b)(a-c) \geq 0$ untuk $a, b, c \geq 0$; setara dengan $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$.

Segi empat talibusur (Bab 12) Segi empat yang titik sudutnya terletak pada satu lingkaran; sudut berhadapan berjumlah 180° .

SOS (Bab 1) Menulis selisih dua ruas ketaksamaan sebagai jumlah kuadrat.

Stewart, teorema (Bab 11) Hubungan panjang ruas pada garis dari titik sudut ke sisi di hadapannya: $b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$.

Sumbu radikal (Bab 12) Tempat kedudukan titik yang kuasanya sama terhadap dua lingkaran; berupa garis.

Surjektif (Bab F3) Fungsi yang daerah hasilnya sama dengan daerah kawannya.

Syarat perlu dan cukup (Bab F1) Dalam $P \Rightarrow Q$, P syarat cukup bagi Q dan Q syarat perlu bagi P .

T

Tali sepatu, rumus (Bab 14) Luas poligon dari koordinat titik sudutnya: $\frac{1}{2} |\sum (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)|$.

Teleskopik (Bab 4, F4) Deret $\sum (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$ yang suku-sukunya saling menghapus.

Teorema Sisa Cina (Bab 7) Sistem kongruensi dengan modulus relatif prima memiliki solusi tunggal modulo hasil kali modulusnya.

Titik pusat segitiga (Bab 15) O (pusat lingkaran luar), I (pusat lingkaran dalam), G (titik berat), H (titik tinggi).

Tripel Pythagoras (Bab 10) Solusi $x^2 + y^2 = z^2$; yang primitif berbentuk $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

V

Vieta, rumus (Bab 2) Hubungan antara akar dan koefisien polinomial.

Vieta jumping (Bab 8) Teknik melompat ke akar lain persamaan kuadrat untuk memperoleh solusi yang lebih kecil.

W

Wilson, teorema (Bab 7) Untuk prima p , $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Lampiran H. Pembahasan Lengkap Latihan

Lampiran ini memuat pembahasan lengkap untuk *semua* soal latihan di Bab F1–F6, Bab 1–21, dan Problem Set Intensif (Bab 44). Nomor pembahasan sama dengan nomor soal. Setiap pembahasan ditulis dalam format yang diharapkan penilai IMO:

- ▶ **Jawaban.** Pernyataan jawaban akhir atau kesimpulan, ditulis di awal agar penilai langsung tahu apa yang dibuktikan.
- ▶ **Penyelesaian.** Argumen lengkap, dipecah menjadi **Klaim**, **Lema**, **Kasus**, atau **Langkah** bernomor. Setiap klaim diikuti buktinya dan ditutup tanda $\square$.
- ▶ **Pemeriksaan.** Verifikasi bahwa jawaban memenuhi soal, atau pengecekan pada kasus kecil.
- ▶ **Kesimpulan.** Rangkuman yang menghubungkan klaim-klaim menjadi jawaban, ditutup tanda $\blacksquare$.

Selain tulisan solusi itu sendiri, setiap pembahasan dilengkapi tiga lapisan pembelajaran:

- ▶ **Ide kunci & cara menemukannya** (kotak biru): bagaimana peserta olimpiade sampai ke pendekatan tersebut, yaitu kasus kecil yang dicoba, pola yang dikenali, dan alasan memilih alat tertentu. Bagian ini melatih cara berpikir, bukan hanya hasil.
- ▶ **Catatan penilaian** (kotak krem): langkah yang wajib ditulis dan kesalahan yang biasanya membuat nilai dipotong.
- ▶ **Pengembangan** (kotak hijau, terutama untuk soal $\star\star\star$): perumuman, soal lanjutan, atau fakta terkait untuk eksplorasi mandiri.

Gunakan lampiran ini *setelah* Anda berusaha sendiri. Bandingkan bukan hanya jawaban, tetapi juga struktur tulisan Anda: apakah setiap kasus tercakup, apakah setiap asumsi “tanpa mengurangi keumuman” dijelaskan, dan apakah jawaban diperiksa kembali. Paket simulasi Bab 43 memiliki kunci tersendiri di bab tersebut, dan soal-soal IMO dibahas di Bagian VI.

Bab F1 — Logika, Himpunan, dan Bahasa Matematika

F1.1

Jawaban. Pernyataan $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ adalah tautologi.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Pernyataan logika dengan dua variabel hanya punya empat kemungkinan nilai, jadi tabel kebenaran adalah bukti yang lengkap dan mekanis. Kuncinya adalah mengingat bahwa implikasi hanya salah dalam satu baris.

Penyelesaian. Sebuah biimplikasi bernilai B tepat ketika kedua ruasnya bernilai sama. Kita hitung kedua ruas untuk keempat kemungkinan nilai (P, Q) .

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
B	B	B	S	B	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	B	B	B	B

Kolom ketiga dihitung dari definisi implikasi (salah hanya pada baris P benar, Q salah). Kolom kelima benar kecuali ketika $\neg P$ dan Q keduanya salah, yaitu pada baris kedua. Kolom ketiga dan kelima identik pada setiap baris.

Kesimpulan. Biimplikasi bernilai B pada keempat baris, jadi merupakan tautologi. Akibat praktisnya: untuk membuktikan “jika P maka Q ” kita boleh membuktikan “ P salah atau Q benar”.

■ **✓ CATATAN PENILAIAN** Tabel harus memuat *keempat* baris; tabel yang hanya memuat baris “yang menarik” tidak dianggap bukti. Tuliskan juga kesimpulan dengan kalimat, bukan hanya tabel.

F1.2

Jawaban. “Ada bilangan genap yang lebih dari 2 yang tidak dapat ditulis sebagai jumlah dua bilangan prima.”

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Negasi dikerjakan dari luar ke dalam: balik kuantor dulu, lalu negasikan bagian dalamnya. Menulis pernyataan dalam bentuk simbolik mencegah kesalahan bahasa.

Penyelesaian. Tulis pernyataan asli secara formal:

$$\forall n [(n \text{ genap} \wedge n > 2) \Rightarrow n \text{ jumlah dua prima}].$$

Negasi kuantor universal adalah kuantor eksistensial: $\neg \forall n R(n) \iff \exists n \neg R(n)$. Negasi implikasi $A \Rightarrow B$ adalah $A \wedge \neg B$, karena implikasi hanya salah ketika A benar dan B salah. Maka negasinya adalah

$$\exists n [n \text{ genap} \wedge n > 2 \wedge n \text{ bukan jumlah dua prima}].$$

Kesimpulan. Negasinya adalah kalimat pada jawaban. Perhatikan bahwa negasi yang benar *bukan* “setiap bilangan genap lebih dari 2 bukan jumlah dua prima”. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kesalahan umum adalah menegasikan hanya kesimpulan (“setiap bilangan genap ... bukan jumlah dua prima”). Itu bukan negasi, melainkan pernyataan yang jauh lebih kuat.

F1.3

Jawaban. Pernyataan benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Hipotesis “irasional” sulit dipakai karena hanya mengatakan sesuatu *tidak* berbentuk pecahan. Kontraposisi membalik keadaan: hipotesis “rasional” memberi rumus konkret $\frac{p}{q}$ yang dapat dihitung.

Penyelesaian. Pernyataan berbentuk $P \Rightarrow Q$ dengan P : “ $a + b$ irasional” dan Q : “ a irasional atau b irasional”. Kita buktikan kontraposisinya $\neg Q \Rightarrow \neg P$, yang setara secara logika. Menurut De Morgan, $\neg Q$ adalah “ a rasional dan b rasional”.

Misalkan a dan b rasional. Menurut definisi ada bilangan bulat p, q, r, s dengan $q \neq 0, s \neq 0, a = \frac{p}{q}$, dan $b = \frac{r}{s}$. Maka

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}.$$

Pembilang $ps + qr$ bulat dan penyebut qs bulat tak nol, sehingga $a + b$ rasional; jadi $\neg P$ benar.

Kesimpulan. Kontraposisi terbukti, sehingga pernyataan aslinya juga benar. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan secara eksplisit bahwa yang dibuktikan adalah kontraposisi. Jangan lupa syarat penyebut tak nol; tanpa itu definisi bilangan rasional belum lengkap.

F1.4

Jawaban. Kesamaan benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Kesamaan himpunan diterjemahkan menjadi kesamaan pernyataan logika tentang keanggotaan x . Setelah itu, hukum De Morgan untuk logika mengerjakan sisanya.

Penyelesaian. Kita buktikan bahwa untuk setiap x , keanggotaan x di kedua ruas setara. Tulis rangkaian ekuivalensi:

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cup C) &\iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) && \text{(definisi selisih dan gabungan)} \\
 &\iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C && \text{(De Morgan untuk logika)} \\
 &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) && \text{(karena } P \iff P \wedge P) \\
 &\iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) && \text{(definisi irisan).}
 \end{aligned}$$

Kesimpulan. Setiap langkah adalah ekuivalensi, jadi x anggota ruas kiri jika dan hanya jika x anggota ruas kanan. Kedua himpunan sama. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jika memakai rantai “ $\iff$ ”, pastikan setiap langkah benar-benar setara dua arah. Jika ragu, buktikan dua inklusi secara terpisah.

F1.5

Jawaban. Pernyataan benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Setiap “jika dan hanya jika” adalah dua soal. Arah yang mudah langsung dari definisi; arah yang sulit memakai kontraposisi karena “tidak habis dibagi 3” dapat dipecah menjadi dua bentuk konkret $3k \pm 1$.

Penyelesaian. Kita buktikan dua arah secara terpisah.

Langkah 1 ($\Rightarrow$). Misalkan $3 \mid n$, tulis $n = 3k$ dengan k bulat. Maka $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, sehingga $3 \mid n^2$.

Langkah 2 ($\Leftarrow$). Kita buktikan kontraposisinya: jika $3 \nmid n$, maka $3 \nmid n^2$. Menurut algoritma pembagian, n bersisa 1 atau 2 bila dibagi 3, jadi $n = 3k + 1$ atau $n = 3k - 1$ untuk suatu bilangan bulat k . Pada kedua kasus

$$n^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1,$$

yang bersisa 1 bila dibagi 3. Jadi $3 \nmid n^2$.

Kesimpulan. Kedua arah terbukti, sehingga $3 \mid n \iff 3 \mid n^2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Membuktikan satu arah saja paling banyak bernilai separuh. Dalam kontraposisi, kedua sisa (1 dan 2) harus ditangani; $3k - 1$ mewakili sisa 2.

F1.6

Jawaban. 4 siswa.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Kata “tidak mengikuti keduanya” berarti komplemen dari gabungan. Menjumlahkan $25 + 18$ menghitung siswa di irisan dua kali, jadi harus dikoreksi sekali.

Penyelesaian. Misalkan S himpunan semua siswa ($|S| = 40$), A himpunan peserta pembinaan aljabar ($|A| = 25$), dan G himpunan peserta geometri ($|G| = 18$), dengan $|A \cap G| = 7$. Siswa yang

mengikuti sedikitnya satu pembinaan membentuk $A \cup G$. Menurut prinsip inklusi-eksklusi dua himpunan (anggota irisan terhitung dua kali pada $|A| + |G|$),

$$|A \cup G| = |A| + |G| - |A \cap G| = 25 + 18 - 7 = 36.$$

Siswa yang tidak mengikuti keduanya membentuk $S \setminus (A \cup G)$, yang berukuran $40 - 36 = 4$.

Kesimpulan. Ada 4 siswa yang tidak mengikuti kedua pembinaan. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jawaban $40 - 25 - 18 = -3$ atau $40 - 25 - 18 + 7 \cdot 2$ menunjukkan inklusi-eksklusi belum dipahami. Selalu periksa apakah jawaban masuk akal ($0 \leq \text{jawaban} \leq 40$).

Bab F2 — Bilangan dan Aljabar Dasar

F2.1

Jawaban. $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; $a^3 + b^3 + 3ab - 1 = (a + b - 1)(a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b)$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Untuk faktorisasi, cari pola yang dikenal: selisih dua kuadrat, jumlah atau selisih pangkat tiga, dan $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$. Suku $3ab$ dan konstanta -1 mengisyaratkan $w = -1$.

Penyelesaian. *Bentuk pertama.* Dengan selisih dua kuadrat dua kali: $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$.

Bentuk kedua. $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$. Dengan rumus selisih dan jumlah pangkat tiga, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ dan $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Bentuk ketiga. Identitas $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu)$ berlaku untuk semua u, v, w . Ambil $u = a, v = b, w = -1$. Ruas kiri menjadi $a^3 + b^3 - 1 - 3ab(-1) = a^3 + b^3 + 3ab - 1$, persis ekspresi yang diminta. Ruas kanan menjadi $(a + b - 1)(a^2 + b^2 + 1 - ab - b(-1) - (-1)a) = (a + b - 1)(a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b)$.

Kesimpulan. Ketiga faktorisasi di atas benar. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Faktorisasi harus diperiksa dengan menjabarkan kembali atau dengan substitusi nilai, misalnya $a = b = 1$: ruas kiri 4, ruas kanan $1 \cdot 4 = 4$.

F2.2

Jawaban. $a^3 - b^3 = 26$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Kita diberi $a - b$ dan ab , bukan a dan b . Jadi tulis $a^3 - b^3$ hanya dalam kedua besaran itu melalui penjabaran $(a - b)^3$.

Penyelesaian. Jabarkan $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a^3 - b^3) - 3ab(a - b)$. Jadi

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = 2^3 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 8 + 18 = 26.$$

Pemeriksaan. Sistem $a - b = 2$, $ab = 3$ memberi $a = 3$, $b = 1$ (atau $a = -1$, $b = -3$). Keduanya memberi $27 - 1 = 26$ dan $-1 + 27 = 26$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Menyelesaikan a dan b secara eksplisit juga sah, tetapi harus menangani kedua pasangan solusi. Jalur identitas lebih cepat dan lebih aman.

F2.3

Jawaban. $x \geq -1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Nilai mutlak dapat dihilangkan dengan tiga cara: memecah kasus tanda, mengkuadratkan (jika kedua ruas tak negatif), atau tafsiran jarak. Mengkuadratkan paling singkat di sini.

Penyelesaian. Kedua ruas $|x - 2|$ dan $|x + 4|$ tak negatif. Untuk bilangan tak negatif u, v berlaku $u \leq v \iff u^2 \leq v^2$, karena fungsi $t \mapsto t^2$ naik pada $[0, \infty)$. Jadi ketaksamaan setara dengan

$$(x - 2)^2 \leq (x + 4)^2 \iff x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 8x + 16 \iff -12 \leq 12x \iff x \geq -1.$$

Pemeriksaan. Untuk $x = -1$: $|-3| = 3 = |3|$. Untuk $x = -2$: $4 \leq 2$ salah. Secara geometris, x lebih dekat ke 2 daripada ke -4 tepat ketika x di kanan titik tengah -1 .

Kesimpulan. Himpunan penyelesaiannya $[-1, \infty)$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Mengkuadratkan hanya sah karena kedua ruas tak negatif; alasan ini harus ditulis. Tanpa itu, penilai dapat menganggap langkahnya tidak dibenarkan.

F2.4

Jawaban. Nilai minimum 3, dicapai di $x = 2$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Nilai ekstrem fungsi kuadrat selalu terbaca setelah melengkapi kuadrat, tanpa kalkulus.

Penyelesaian. Lengkapi kuadrat:

$$2x^2 - 8x + 11 = 2(x^2 - 4x) + 11 = 2((x - 2)^2 - 4) + 11 = 2(x - 2)^2 + 3.$$

Karena $(x - 2)^2 \geq 0$ untuk semua x real, ekspresinya ≥ 3 . Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $(x - 2)^2 = 0$, yaitu $x = 2$, dan memang $8 - 16 + 11 = 3$.

Kesimpulan. Nilai minimumnya 3 di $x = 2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jawaban harus memuat *nilai* minimum dan *di mana* dicapai, serta alasan mengapa nilai itu memang tercapai.

F2.5

Jawaban. Identitas benar untuk semua x real.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Identitas bagian bulat hampir selalu diselesaikan dengan menulis $x = n + f$ lalu memecah selang f pada titik-titik tempat salah satu ruas “melompat”, di sini $f = \frac{1}{2}$.

Penyelesaian. Tulis $x = n + f$ dengan $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ dan $f = \{x\} \in [0, 1)$. Karena $\lfloor m+t \rfloor = m + \lfloor t \rfloor$ untuk m bulat, cukup menghitung bagian pecahan.

Kasus 1: $0 \leq f < \frac{1}{2}$. Maka $0 \leq f + \frac{1}{2} < 1$, jadi $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + \lfloor f + \frac{1}{2} \rfloor = n$. Juga $0 \leq 2f < 1$, jadi $\lfloor 2x \rfloor = 2n + \lfloor 2f \rfloor = 2n$. Ruas kiri $n + n = 2n$, sama dengan ruas kanan.

Kasus 2: $\frac{1}{2} \leq f < 1$. Maka $1 \leq f + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, jadi $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = n + 1$. Juga $1 \leq 2f < 2$, jadi $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$. Ruas kiri $n + (n + 1) = 2n + 1$, sama dengan ruas kanan.

Kesimpulan. Kedua kasus mencakup semua kemungkinan f , dan pada keduanya identitas berlaku. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Pastikan kasus-kasusnya menutup seluruh $[0, 1)$, termasuk titik batas $f = \frac{1}{2}$. Lupa menyebut kasus batas adalah kehilangan poin yang klasik.

F2.6

Jawaban. $-2 < m < 3$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA “Positif untuk semua x ” berarti nilai minimum positif. Nilai minimum fungsi kuadrat diperoleh dengan melengkapkan kuadrat, atau setara dengan diskriminan negatif.

Penyelesaian. Tulis $g(x) = x^2 - 2mx + m + 6$. Dengan melengkapkan kuadrat, $g(x) = (x - m)^2 + (m + 6 - m^2)$. Nilai minimum g adalah $m + 6 - m^2$, dicapai di $x = m$. Jadi $g(x) > 0$ untuk semua x jika dan hanya jika nilai minimumnya positif:

$$m + 6 - m^2 > 0 \iff m^2 - m - 6 < 0 \iff (m - 3)(m + 2) < 0 \iff -2 < m < 3.$$

Pemeriksaan. Untuk $m = 3$, $g(x) = (x - 3)^2$ bernilai 0 di $x = 3$, jadi batas 3 memang tidak termasuk; demikian pula $m = -2$ memberi $(x + 2)^2$.

Kesimpulan. Syaratnya $-2 < m < 3$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Periksa titik batas $m = -2$ dan $m = 3$ untuk memastikan ketaksamaannya tegas. Banyak siswa menulis $\leq$ padahal soal meminta > 0 .

Bab F3 — Fungsi

F3.1

Jawaban. Daerah asal $[1, 3)$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Daerah asal ditentukan oleh semua operasi yang “berbahaya”: akar (argumen tak negatif) dan pembagian (penyebut tak nol). Tuliskan semua syarat dulu, baru selesaikan.

Penyelesaian. $f(x)$ terdefinisi (sebagai bilangan real) tepat ketika penyebut $3 - x \neq 0$ dan bilangan di bawah akar tak negatif, yaitu $\frac{x-1}{3-x} \geq 0$. Titik kritisnya $x = 1$ (pembilang nol) dan $x = 3$ (penyebut nol). Periksa tanda pada setiap selang:

- ▶ $x < 1$: $x - 1 < 0$ dan $3 - x > 0$, hasil bagi negatif;
- ▶ $1 \leq x < 3$: $x - 1 \geq 0$ dan $3 - x > 0$, hasil bagi tak negatif;
- ▶ $x > 3$: $x - 1 > 0$ dan $3 - x < 0$, hasil bagi negatif.

Kesimpulan. Daerah asalnya $\{x : 1 \leq x < 3\} = [1, 3)$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kesalahan umum adalah memasukkan $x = 3$ (penyebut nol) atau mengalikan pertidaksamaan dengan $3 - x$ tanpa memperhatikan tanda.

F3.2

Jawaban. $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$, $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 8$, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Komposisi dikerjakan dari dalam ke luar: $f \circ g$ berarti g dulu. Invers diperoleh dengan menukar peran x dan y lalu menyelesaikan.

Penyelesaian. Menurut definisi komposisi, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 3 = 2x^2 + 1$, dan $(g \circ f)(x) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 8$. Untuk invers: f naik tegas, jadi injektif, dan setiap $y \in \mathbb{R}$ tercapai oleh $x = \frac{y-3}{2}$, jadi surjektif. Menyelesaikan $y = 2x + 3$ memberi $x = \frac{y-3}{2}$, sehingga $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

Pemeriksaan. $f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 = x$. Perhatikan pula $f \circ g \neq g \circ f$ (misalnya di $x = 0$: $1 \neq 8$), jadi komposisi tidak komutatif. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan mengapa f memiliki invers (bijektif). Pemeriksaan $f(f^{-1}(x)) = x$ adalah cara cepat menangkap kesalahan aljabar.

F3.3

Jawaban. f injektif tetapi tidak surjektif.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Injektif dibuktikan dari persamaan $f(n) = f(m)$; tidak surjektif dibuktikan dengan satu nilai yang tidak tercapai. Paritas memberi nilai itu seketika.

Penyelesaian. *Injektif.* Misalkan $f(n) = f(m)$, yaitu $2n + 1 = 2m + 1$. Maka $2n = 2m$ dan $n = m$. *Tidak surjektif.* Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n + 1$ ganjil. Bilangan $0 \in \mathbb{Z}$ genap, jadi tidak ada n dengan $f(n) = 0$.

Kesimpulan. f injektif dan tidak surjektif (daerah hasilnya himpunan bilangan ganjil). ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Untuk “tidak surjektif”, satu contoh konkret wajib ditulis. Kalimat “jelas tidak semua bilangan tercapai” tidak dianggap bukti.

F3.4

Jawaban. $f\left(\frac{T}{2}\right) = 0$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Gunakan kedua sifat pada titik yang sama: periodisitas menggeser $\frac{T}{2}$ ke $-\frac{T}{2}$, dan keganjilan membalik tandanya.

Penyelesaian. Tulis $c = f\left(\frac{T}{2}\right)$. Karena f periodik dengan periode T , $f(x - T) = f(x)$ untuk semua x (substitusikan $x - T$ ke $f(y + T) = f(y)$). Dengan $x = \frac{T}{2}$: $c = f\left(-\frac{T}{2}\right)$. Karena f ganjil, $f\left(-\frac{T}{2}\right) = -f\left(\frac{T}{2}\right) = -c$. Jadi $c = -c$, sehingga $c = 0$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Periodisitas biasanya diberikan sebagai $f(x + T) = f(x)$; tuliskan bahwa ini juga berarti $f(x - T) = f(x)$.

F3.5

Jawaban. $x = 1$ atau $x = 2$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Setiap persamaan eksponen yang memuat 4^x dan 2^x adalah persamaan kuadrat yang menyamar. Substitusi $t = 2^x$ membuka penyamarannya.

Penyelesaian. Karena $4^x = (2^x)^2$ dan $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, persamaan menjadi $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. Misalkan $t = 2^x$; untuk x real, $t > 0$ dan setiap $t > 0$ berasal dari tepat satu $x = \log_2 t$. Persamaan $t^2 - 6t + 8 = 0$ terfaktor $(t - 2)(t - 4) = 0$, jadi $t = 2$ atau $t = 4$, keduanya positif. Maka $x = \log_2 2 = 1$ atau $x = \log_2 4 = 2$.

Pemeriksaan. $x = 1$: $4 - 12 + 8 = 0$. $x = 2$: $16 - 24 + 8 = 0$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Catat syarat $t > 0$ dan periksa kedua akar t terhadap syarat ini. Di soal lain, akar negatif harus dibuang.

F3.6

Jawaban. Kedua pernyataan benar; contoh: $f: \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$, $f(1) = 1$, dan $g: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ konstan.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Ikuti definisi: untuk injektif mulai dari $f(x_1) = f(x_2)$, untuk surjektif mulai dari sembarang z di daerah kawan. Contoh penyangkal paling mudah dibangun dengan himpunan sekecil mungkin.

Penyelesaian. Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$.

Klaim 1. Jika $g \circ f$ injektif, maka f injektif.

Bukti klaim. Ambil $x_1, x_2 \in A$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$. Terapkan g : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Karena $g \circ f$ injektif, $x_1 = x_2$. □

Klaim 2. Jika $g \circ f$ surjektif, maka g surjektif.

Bukti klaim. Ambil $z \in C$. Karena $g \circ f$ surjektif, ada $x \in A$ dengan $g(f(x)) = z$. Maka $y = f(x) \in B$ memenuhi $g(y) = z$. □

Contoh. Dengan f dan g pada jawaban, $g \circ f: \{1\} \rightarrow \{1\}$ injektif (daerah asalnya satu titik), tetapi $g(1) = g(2) = 1$ sehingga g tidak injektif.

Kesimpulan. Klaim 1 dan 2 terbukti, dan contoh menunjukkan g tidak harus injektif. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Soal meminta tiga hal: dua bukti dan satu contoh. Jawaban yang hanya membuktikan satu klaim kehilangan lebih dari separuh nilai.

Bab F4 — Notasi Sigma, Deret, dan Induksi

F4.1

Jawaban. 590 dan 440.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pisahkan jumlah menjadi bagian-bagian yang rumusnya dikenal: $\sum k$, $\sum k^2$, dan $\sum 1$.

Penyelesaian. Dengan kelinearan sigma dan $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$: $\sum_{k=1}^{20} (3k-2) = 3 \sum_{k=1}^{20} k - 2 \cdot 20 = 3 \cdot 210 - 40 = 590$. Dengan $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$: $\sum_{k=1}^{10} k(k+1) = \sum k^2 + \sum k = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} = 385 + 55 = 440$.

Pemeriksaan. Deret pertama adalah deret aritmetika 1, 4, ..., 58 dengan 20 suku: $\frac{20(1+58)}{2} = 590$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kesalahan paling umum adalah lupa bahwa $\sum_{k=1}^{20} 2 = 40$, bukan 2.

F4.2

Jawaban. Rumus benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Selisih ruas kanan dari n ke $n+1$ adalah $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, persis suku yang ditambahkan. Induksi selalu berhasil jika selisih kedua ruas cocok.

Penyelesaian. Misalkan $P(n)$: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Langkah 1 (basis). $P(1)$: ruas kiri 1, ruas kanan $1^2 = 1$.

Langkah 2 (langkah induksi). Misalkan $P(n)$ benar. Suku ke- $(n+1)$ adalah $2(n+1)-1 = 2n+1$, sehingga $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$, yaitu $P(n+1)$.

Kesimpulan. Menurut prinsip induksi, $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tulis basis, hipotesis, dan langkah secara terpisah. Menulis “terbukti dengan induksi” tanpa langkah induksi bernilai nol.

F4.3

Jawaban. Pernyataan benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Dalam langkah induksi untuk keterbagian, jabarkan ekspresi $n+1$ dan pisahkan bagian yang sama dengan ekspresi n . Sisanya harus habis dibagi dengan alasan tersendiri.

Penyelesaian. Misalkan $P(n)$: $6 \mid n^3 - n$.

Langkah 1. $P(1)$: $1 - 1 = 0$ habis dibagi 6.

Langkah 2. Misalkan $P(n)$. Jabarkan:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1).$$

Suku $n^3 - n$ habis dibagi 6 menurut hipotesis. Di antara dua bilangan berurutan $n, n+1$ ada yang genap, jadi $2 \mid n(n+1)$ dan $6 \mid 3n(n+1)$. Jumlah dua kelipatan 6 adalah kelipatan 6, sehingga $P(n+1)$ benar.

Kesimpulan. Menurut induksi, $6 \mid n^3 - n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Alasan $6 \mid 3n(n+1)$ harus disebut (hasil kali dua bilangan berurutan genap). Bukti alternatif tanpa induksi: $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, hasil kali tiga bilangan berurutan.

F4.4

Jawaban. Rumus benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Keluarkan faktor $(n+1)^2$ yang sama dari kedua suku; sisanya adalah kuadrat sempurna $(n+2)^2$.

Penyelesaian. Misalkan $P(n)$: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Langkah 1. $P(1)$: $1 = \frac{1 \cdot 4}{4}$.

Langkah 2. Misalkan $P(n)$. Maka

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

yang merupakan $P(n+1)$.

Kesimpulan. Rumus benar untuk semua n . (Akibat menarik: $1^3 + \dots + n^3 = (1 + \dots + n)^2$.) ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Hindari menjabarkan semuanya menjadi polinomial derajat empat; faktorisasi membuat pemeriksaan lebih mudah dan lebih meyakinkan bagi penilai.

F4.5

Jawaban. Kedua identitas benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tulis setiap faktor atau suku dalam bentuk yang membuat pembatalan terlihat: $\frac{k+1}{k}$ dan $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Penyelesaian. Hasil kali. $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, jadi $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{n+1}{n}$. Setiap pembilang $k+1$ (untuk $k < n$) terhapus oleh penyebut faktor berikutnya, sehingga yang tersisa hanya pembilang terakhir $n+1$ dan penyebut pertama 1: hasilnya $n+1$.

Jumlah. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Maka $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, karena semua suku tengah saling menghapus.

Pemeriksaan. Untuk $n = 2$: $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$ dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan dengan jelas suku mana yang tersisa setelah pembatalan; jawaban yang langsung melompat ke hasil akhir sering dianggap belum lengkap.

F4.6

Jawaban. $a_n = 2^n - 1$ untuk semua $n \geq 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Rekurensi dua langkah memerlukan dua basis. Tebakan $2^n - 1$ muncul dari menghitung beberapa suku pertama: 1, 3, 7, 15.

Penyelesaian. Misalkan $P(n)$: $a_n = 2^n - 1$. Karena rekurensi memakai dua suku sebelumnya, kita perlu dua kasus basis dan induksi kuat.

Langkah 1. $a_1 = 1 = 2^1 - 1$ dan $a_2 = 3 = 2^2 - 1$, jadi $P(1)$ dan $P(2)$ benar.

Langkah 2. Misalkan $n \geq 1$ dan $P(n)$, $P(n + 1)$ benar. Maka

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n = 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} - 3 + 2 = 2^{n+2} - 1,$$

yaitu $P(n + 2)$.

Kesimpulan. Menurut induksi (kuat), $a_n = 2^n - 1$ untuk semua $n \geq 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Satu basis saja tidak cukup; langkah induksi memakai $P(n)$ dan $P(n + 1)$. Ini kesalahan klasik yang dipotong penilai.

Bab F5 — Kombinatorika Dasar dan Peluang

F5.1

Jawaban. 720 cara untuk jabatan; 120 panitia.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pertanyaan kunci: apakah urutan penting? Jabatan berbeda berarti ya (permutasi); panitia tanpa jabatan berarti tidak (kombinasi).

Penyelesaian. *Jabatan.* Ketua dipilih dari 10 orang, sekretaris dari 9 orang sisanya, bendahara dari 8 orang sisanya. Menurut aturan perkalian: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. *Panitia.* Urutan tidak diperhatikan. Setiap panitia beranggota 3 menghasilkan tepat $3! = 6$ penugasan jabatan, jadi banyak panitia $\frac{720}{6} = 120 = \binom{10}{3}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jelaskan hubungan kedua jawaban ($720 = 120 \cdot 3!$); ini menunjukkan pemahaman, bukan sekadar hafalan rumus.

F5.2

Jawaban. -160.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tulis suku umum binomial, lalu pilih indeks yang memberi pangkat x yang diminta. Tanda negatif dari $(-1)^{6-k}$ mudah terlupa.

Penyelesaian. Menurut teorema binomial, $(2x - 1)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (2x)^k (-1)^{6-k}$. Suku x^3 berasal dari $k = 3$ saja: $\binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot (-1)^3 x^3 = 20 \cdot 8 \cdot (-1)x^3 = -160x^3$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Periksa tanda: $(-1)^3 = -1$. Jawaban 160 (tanpa tanda minus) tetap salah.

F5.3

Jawaban. 165.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Bintang dan batang langsung berlaku untuk bilangan tak negatif. Untuk bilangan asli, geser setiap variabel satu satuan.

Penyelesaian. Substitusi $a' = a - 1$, $b' = b - 1$, $c' = c - 1$, $d' = d - 1$ adalah korespondensi satu-satu antara solusi bilangan asli dari $a + b + c + d = 12$ dan solusi bilangan bulat tak negatif dari $a' + b' + c' + d' = 8$. Menurut bintang dan batang (delapan bintang, tiga batang), banyaknya $\binom{8+3}{3} = \binom{11}{3} = 165$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan bahwa substitusi $a' = a - 1$ adalah korespondensi satu-satu; itulah yang membenarkan penghitungan.

F5.4

Jawaban. 26.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** “Relatif prima dengan 30” berarti menghindari tiga prima. Hitung komplemennya dengan inklusi-eksklusi, lalu periksa dengan $\varphi(30) = 8$ per blok 30.

Penyelesaian. Bilangan relatif prima dengan $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ tepat ketika tidak habis dibagi 2, 3, maupun 5. Misalkan A_d himpunan kelipatan d di $\{1, \dots, 100\}$; maka $|A_d| = \lfloor 100/d \rfloor$ dan $A_p \cap A_q = A_{pq}$ untuk prima berbeda. Nilainya: $|A_2| = 50$, $|A_3| = 33$, $|A_5| = 20$, $|A_6| = 16$, $|A_{10}| = 10$, $|A_{15}| = 6$, $|A_{30}| = 3$. Inklusi-eksklusi:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74.$$

Jadi $100 - 74 = 26$ bilangan relatif prima dengan 30.

Pemeriksaan. Setiap blok 30 bilangan berurutan memuat $\varphi(30) = 8$ bilangan seperti itu; 1–90 memberi 24, dan di 91–100 hanya 91 dan 97. Total 26. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kesalahan umum: lupa menambahkan kembali irisan tiga himpunan (A_{30}). Pemeriksaan dengan cara kedua sangat dianjurkan.

F5.5

Jawaban. 1440.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Syarat “bersebelahan” diatasi dengan menempelkan dua orang menjadi satu blok, lalu menghitung susunan blok.

Penyelesaian. Gabungkan dua orang tertentu, sebut X dan Y , menjadi satu blok. Maka ada 7 unit (blok dan 6 orang lain) di sekeliling meja bundar, yang dapat disusun dalam $(7 - 1)! = 720$ cara (rotasi dianggap sama). Di dalam blok, X dapat duduk di kiri atau kanan Y : 2 cara. Setiap susunan dengan X, Y bersebelahan muncul tepat sekali dalam penghitungan ini. Totalnya $720 \cdot 2 = 1440$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jangan lupa faktor 2 untuk urutan di dalam blok, dan pakai $(k - 1)!$ untuk susunan melingkar, bukan $k!$.

F5.6

Jawaban. $\frac{5}{16}$ dan $\frac{11}{32}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Ruang sampel yang sama mungkin adalah 64 barisan, bukan 7 kemungkinan banyak angka. Simetri memberi pemeriksaan cepat.

Penyelesaian. Ruang sampel adalah $2^6 = 64$ barisan hasil lemparan yang sama mungkin. Banyak barisan dengan tepat k angka adalah $\binom{6}{k}$. Tepat tiga angka: $\frac{\binom{6}{3}}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$. Lebih banyak angka berarti 4, 5, atau 6 angka: $\frac{15+6+1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$.

Pemeriksaan. Karena simetri angka–gambar, peluang “lebih banyak angka” sama dengan peluang “lebih banyak gambar”, dan keduanya berjumlah $1 - \frac{5}{16}$; jadi masing-masing $\frac{11}{32}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Menjawab $\frac{1}{7}$ untuk tepat tiga angka adalah kesalahan ruang sampel; penilai akan memberi nol untuk bagian itu.

Bab F6 — Geometri dan Trigonometri Dasar

F6.1

Jawaban. $n = 10$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Sudut dalam dan sudut luar saling melengkapi; jumlah sudut luar selalu 360° , sehingga jalur sudut luar paling cepat.

Penyelesaian. Jumlah sudut dalam segi- n konveks adalah $(n - 2) \cdot 180^\circ$, dan pada segi- n beraturan semua sudutnya sama. Jadi $\frac{(n-2)180^\circ}{n} = 144^\circ$, yaitu $180n - 360 = 144n$, $36n = 360$, $n = 10$.

Pemeriksaan. Sudut luar $180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$, dan jumlah sudut luar poligon konveks 360° , jadi $n = \frac{360}{36} = 10$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan rumus yang dipakai; hasil tanpa alasan tidak dianggap solusi lengkap.

F6.2

Jawaban. Pernyataan benar.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Melengkapkan segitiga siku-siku menjadi persegi panjang adalah trik standar: sifat diagonal persegi panjang langsung memberi hasil.

Penyelesaian. Misalkan segitiga ABC siku-siku di C dan M titik tengah AB . Pantulkan C terhadap M menjadi D , sehingga M titik tengah CD .

Klaim 1. $ACBD$ persegi panjang.

Bukti klaim. Diagonal AB dan CD saling membagi dua di M , jadi $ACBD$ jajaran genjang. Sudut jajaran genjang di C adalah 90° , dan sudut-sudut berdekatan jajaran genjang berjumlah 180° , sehingga semua sudutnya siku-siku. $\square$

Klaim 2. Diagonal persegi panjang sama panjang.

Bukti klaim. Segitiga ACB dan BDA kongruen (sisi-sudut-sisi: $AC = BD$, $CB = DA$, sudut siku-siku di antaranya), jadi $AB = CD$. $\square$

Kesimpulan. $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Setiap langkah geometri perlu alasan: mengapa jajaran genjang, mengapa persegi panjang, mengapa diagonal sama. Menyebut “jelas dari gambar” tidak diterima.

F6.3

Jawaban. $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ = 1$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tulis setiap sudut sebagai jumlah atau selisih sudut istimewa, lalu gunakan rumus jumlah sudut. Pasangan sudut berpenyiku saling menukar sinus dan kosinus.

Penyelesaian. Dengan rumus kosinus jumlah: $\cos 75^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Dengan rumus tangen selisih $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$: $\tan 15^\circ = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. Karena $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ$, $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Periksa tanda pada rumus kosinus jumlah ($\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$); tanda yang terbalik adalah kesalahan paling sering.

F6.4

Jawaban. $BC = BD = AD$ dan $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Sudut 36° dan 72° menghasilkan banyak segitiga sama kaki. Kejar sudut dulu, lalu cari segitiga sebangun untuk memperoleh persamaan panjang.

Penyelesaian. Karena $AB = AC$, $\angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Garis bagi BD memberi $\angle ABD = \angle DBC = 36^\circ$.

Klaim 1. $AD = BD$.

Bukti klaim. Pada segitiga ABD , $\angle DAB = 36^\circ = \angle ABD$, jadi segitiga itu sama kaki dengan $AD = BD$. $\square$

Klaim 2. $BD = BC$.

Bukti klaim. Pada segitiga BDC , $\angle BDC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ = \angle BCD$, jadi $BD = BC$. $\square$

Klaim 3. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$.

Bukti klaim. Keduanya bersudut $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ (pada BCD : $\angle CBD = 36^\circ$, $\angle C = \angle BDC = 72^\circ$). $\square$

Ambil $BC = 1$ dan $AB = AC = x$. Dari klaim 1 dan 2, $AD = 1$, jadi $CD = x - 1$. Kesebangunan memberi $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$, yaitu $x = \frac{1}{x-1}$, atau $x^2 - x - 1 = 0$. Karena $x > 0$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Kesimpulan. $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, rasio emas. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Kesebangunan harus dinyatakan dengan urutan titik yang benar; urutan yang salah menghasilkan perbandingan yang salah.

F6.5

Jawaban. Rumus benar; luas maksimum 20, saat $\gamma = 90^\circ$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Luas selalu $\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$; trigonometri hanya menyatakan tinggi dalam sisi dan sudut.

Penyelesaian. Misalkan $a = BC$ dan $b = CA$ mengapit $\gamma = \angle C$, dan h jarak A ke garis BC . Jika γ lancip, segitiga siku-siku yang dibentuk A , C , dan kaki tegak lurus memberi $h = b \sin \gamma$. Jika γ tumpul, kaki tegak lurus berada pada perpanjangan BC dan sudut di C pada segitiga siku-siku itu adalah $180^\circ - \gamma$, sehingga $h = b \sin(180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma$. Jika $\gamma = 90^\circ$, $h = b = b \sin \gamma$. Dalam semua kasus luasnya $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Untuk $a = 5$, $b = 8$: luas $= 20 \sin \gamma \leq 20$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $\sin \gamma = 1$, yaitu $\gamma = 90^\circ$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Kasus sudut tumpul sering dilupakan. Bukti yang lengkap menyebutkannya, walaupun hanya dengan $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$.

F6.6

Jawaban. Identitas benar, dan $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Kaitkan 18° dengan kelipatannya: $3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$ dan $2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$ saling berpenyiku. Persamaan kubik yang muncul memiliki akar mudah $s = 1$.

Penyelesaian. *Identitas.* Dengan rumus jumlah dan sudut ganda,

$$\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta = 2 \sin \theta \cos^2 \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta.$$

Substitusi $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$: $\sin 3\theta = 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

Nilai $\sin 18^\circ$. Misalkan $s = \sin 18^\circ$. Karena $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$, $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$. Dengan identitas di atas, $3s - 4s^3 = 1 - 2s^2$, yaitu $4s^3 - 2s^2 - 3s + 1 = 0$. Karena $s = 1$ adalah akar,

faktorkan: $(s-1)(4s^2+2s-1)=0$. Jelas $s \neq 1$, jadi $4s^2+2s-1=0$ dan $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Karena $0 < 18^\circ < 90^\circ$, $s > 0$.

Kesimpulan. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Akar negatif harus dibuang dengan alasan $\sin 18^\circ > 0$. Akar $s = 1$ harus dibuang dengan alasan $\sin 18^\circ \neq 1$.

Bab 1 — Ketaksamaan

1.1

Jawaban. $x + \frac{1}{x} \geq 2$ untuk $x > 0$; nilai minimum $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ adalah $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, dicapai di $x = 0$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Bagian kedua tampak rumit, tetapi pembilang dan penyebut sama-sama bergantung pada $x^2 + 2$. Substitusi $t = \sqrt{x^2 + 2}$ membuat struktur $t + \frac{1}{t}$ terlihat. Refleksi AM-GM gagal karena kesamaannya ($t = 1$) di luar daerah t ; di situ kemonotonan mengambil alih.

Penyelesaian. *Bagian pertama.* Untuk $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, dengan kesamaan jika dan hanya jika $x = 1$.

Bagian kedua. Misalkan $t = \sqrt{x^2 + 2}$. Maka $t \geq \sqrt{2}$, dengan $t = \sqrt{2}$ tepat ketika $x = 0$, dan $x^2 + 3 = t^2 + 1$. Jadi $E(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} = t + \frac{1}{t} =: h(t)$. Kesamaan AM-GM $h(t) \geq 2$ memerlukan $t = 1$, yang tidak mungkin. Kita gunakan kemonotonan.

Klaim 1. h naik tegas pada $[1, \infty)$.

Bukti klaim. Untuk $t_2 > t_1 \geq 1$, $h(t_2) - h(t_1) = (t_2 - t_1) + \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} = (t_2 - t_1) \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right) > 0$, karena $t_2 - t_1 > 0$ dan $t_1 t_2 > 1$. □

Karena $t \geq \sqrt{2} > 1$, klaim memberi $E(x) = h(t) \geq h(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, dengan kesamaan tepat saat $t = \sqrt{2}$, yaitu $x = 0$.

Kesimpulan. Nilai minimumnya $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ di $x = 0$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Menulis “minimum 2 menurut AM-GM” adalah jawaban salah dan bernilai nol. Setiap ketaksamaan untuk nilai minimum harus disertai bukti bahwa batas itu *tercapai*.

1.2

Jawaban. Kedua ketaksamaan benar, dengan kesamaan tepat saat $a = b = c$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Hasil kali $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$ adalah sinyal kuat untuk AM-GM. Untuk bagian kedua, menjabarkan hasil kali mengungkap tiga pasangan $u + \frac{1}{u}$.

Penyelesaian. Ketaksamaan pertama. Ketiga bilangan $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ positif dengan hasil kali 1. AM-GM: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$, dengan kesamaan jika ketiganya sama, yaitu $a = b = c$. Ketaksamaan kedua. Jabarkan hasil kali:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right).$$

Setiap kurung berbentuk $u + \frac{1}{u}$ dengan $u > 0$, sehingga menurut Soal 1.1 masing-masing paling sedikit 2. Jadi totalnya paling sedikit $3 + 6 = 9$, dengan kesamaan jika $a = b = c$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan syarat positif (AM-GM memerlukannya) dan kasus kesamaan. Alternatif: Cauchy-Schwarz langsung memberi $(\sum a)(\sum \frac{1}{a}) \geq 9$.

1.3

Jawaban. Terbukti, dengan kesamaan di $a = b = 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Syarat linear $a + b = 2$ dan target berderajat empat: naikan derajat bertahap dengan QM-AM dua kali, dengan kesamaan di $a = b = 1$ yang terlihat dari simetri.

Penyelesaian.

Lema. Untuk semua bilangan real u, v berlaku $u^2 + v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2}$.

Bukti lema. $2(u^2 + v^2) - (u + v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2 \geq 0$. □

Dengan $u = a, v = b$: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 2$. Dengan $u = a^2, v = b^2$: $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{2^2}{2} = 2$, di mana langkah terakhir memakai $a^2 + b^2 \geq 2 > 0$. Kesamaan pada kedua langkah memerlukan $a = b$, jadi $a = b = 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Perhatikan a, b real (boleh negatif); lema $u^2 + v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2}$ berlaku untuk semua bilangan real, jadi tidak ada masalah. Langkah $(a^2 + b^2)^2 \geq 4$ memerlukan $a^2 + b^2 \geq 2 \geq 0$, yang harus disebut.

1.4

Jawaban. Terbukti; kesamaan tepat di $a = b = c = 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Dugaan kesamaan $a = b = c = 1$. Bentuk Engel langsung memberi batas yang terlalu lemah, jadi kita “membalik” pecahan: $\frac{a^2}{a+b^2} = a - \frac{ab^2}{a+b^2}$, sehingga batas atas untuk pecahan kecil cukup, dan batas atas mudah diperoleh dari AM-GM pada penyebut.

Penyelesaian. Misalkan $L = \sum_{\text{siklis}} \frac{a^2}{a+b^2}$. Bentuk Engel langsung memberi arah yang salah, jadi kita pakai trik “AM-GM di penyebut”.

Klaim 1. $\frac{a^2}{a+b^2} \geq a - \frac{b\sqrt{a}}{2}$.

Bukti klaim. Tulis $\frac{a^2}{a+b^2} = a - \frac{ab^2}{a+b^2}$. Menurut AM-GM, $a + b^2 \geq 2\sqrt{a \cdot b^2} = 2b\sqrt{a}$, sehingga $\frac{ab^2}{a+b^2} \leq \frac{ab^2}{2b\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{2}$. □

Menjumlahkan klaim 1 secara siklis: $L \geq (a + b + c) - \frac{1}{2}S = 3 - \frac{S}{2}$, dengan $S = b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}$.

Klaim 2. $S \leq 3$.

Bukti klaim. Tulis setiap suku sebagai hasil kali: $b\sqrt{a} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{ab}$, $c\sqrt{b} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{bc}$, $a\sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{ca}$.
Cauchy–Schwarz: $S \leq \sqrt{(b + c + a)(ab + bc + ca)}$. Karena $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$ (Contoh 1.1),
 $S \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3$. $\square$

Kesimpulan. $L \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Semua ketaksamaan menjadi kesamaan saat $a = b = c = 1$, dan memang $L = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ di titik itu. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Periksa bahwa setiap ketaksamaan antara mempertahankan kasus kesamaan $a = b = c = 1$; jika tidak, pendekatannya pasti gagal. Penilai sangat menghargai klaim bernomor seperti di atas.

1.5

Jawaban. Terbukti, dengan kesamaan di $x = y = z = 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Ruas kiri berderajat dua dan ruas kanan berderajat satu; syarat $xyz = 1$ memungkinkan kita “menaikkan” derajat ruas kanan melalui $x + y + z \geq 3$.

Penyelesaian. Misalkan $s = x + y + z$.

Langkah 1. Menurut QM–AM (atau Cauchy–Schwarz dengan $(1, 1, 1)$), $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{s^2}{3}$.

Langkah 2. Menurut AM–GM, $s \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, jadi $\frac{s}{3} \geq 1$.

Langkah 3. Gabungkan: $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{s^2}{3} = s \cdot \frac{s}{3} \geq s = x + y + z$.

Kesimpulan. Ketaksamaan terbukti; kesamaan memerlukan $x = y = z$ dan $s = 3$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jangan menggabungkan langkah secara diam-diam; tuliskan $\frac{s^2}{3} \geq s$ beserta alasannya $s \geq 3$.

1.6

Jawaban. Terbukti, dengan kesamaan di $a = b = c$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Ingin mengubah $\frac{a^3}{b^2}$ menjadi a : tambahkan dua salinan b agar pangkat b saling menghapus dalam AM–GM. Teknik “menambahkan suku untuk membunuh penyebut” ini sangat umum.

Penyelesaian. Terapkan AM–GM pada tiga bilangan positif $\frac{a^3}{b^2}, b, b$: $\frac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = 3a$.
Secara siklis, $\frac{b^3}{c^2} + 2c \geq 3b$ dan $\frac{c^3}{a^2} + 2a \geq 3c$. Menjumlahkan ketiganya: $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 2(a + b + c) \geq 3(a + b + c)$, sehingga ruas kiri soal $\geq a + b + c$. Kesamaan AM–GM memerlukan $\frac{a^3}{b^2} = b$, yaitu $a = b$, dan serupa $b = c$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Periksa bahwa suku tambahan $(2b, 2c, 2a)$ setelah dijumlahkan memang menghasilkan $2(a + b + c)$; kesalahan indeks di sini sering terjadi.

1.7

Jawaban. Terbukti; kesamaan di $(1, 1, 1)$ dan $(2, 1, 0)$ beserta rotasi siklisnya.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Uji kasus batas: $(1, 1, 1)$ memberi 4, dan $(2, 1, 0)$ juga memberi 4. Adanya dua kasus kesamaan yang berbeda menunjukkan SOS atau AM-GM langsung tidak cukup; diperlukan asumsi urutan yang cerdas. Karena ekspresi siklis (bukan simetris), yang boleh diasumsikan adalah posisi nilai tengah.

Penyelesaian. Misalkan $E(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a + abc$.

Langkah 1 (reduksi tanpa mengurangi keumuman). E tidak berubah oleh rotasi siklis $(a, b, c) \mapsto (b, c, a)$, begitu pula syarat $a + b + c = 3$. Di antara tiga bilangan, salah satunya bernilai tengah; dengan rotasi siklis kita dapat menempatkannya di posisi kedua. Jadi boleh diasumsikan b terletak di antara a dan c , yaitu $(a - b)(b - c) \geq 0$.

Klaim 1. $E \leq b(a + c)^2$.

Bukti klaim. Hitung $b(a + c)^2 - E = a^2b + 2abc + bc^2 - a^2b - b^2c - c^2a - abc = c(ab + bc - b^2 - ac) = c(a - b)(b - c)$, yang tak negatif karena $c \geq 0$ dan $(a - b)(b - c) \geq 0$. $\square$

Klaim 2. $b(a + c)^2 \leq 4$.

Bukti klaim. Dengan AM-GM tiga suku $b, \frac{a+c}{2}, \frac{a+c}{2}$: $b(a + c)^2 = 4 \cdot b \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \leq 4 \left(\frac{b+(a+c)}{3} \right)^3 = 4$. $\square$

Kesimpulan. $E \leq 4$. Kesamaan: klaim 2 memerlukan $b = \frac{a+c}{2}$, jadi $b = 1$ dan $a + c = 2$; klaim 1 memerlukan $c(a - b)(b - c) = 0$. Diperoleh $c = 0, a = 2$ atau $a = b = c = 1$ (atau $b = c = 1, a = 1$). Jadi $(1, 1, 1)$ dan $(2, 1, 0)$ beserta rotasinya; memang $E(2, 1, 0) = 4$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Asumsi “ b di antara a dan c ” harus dibenarkan dengan rotasi siklis. Mengasumsikan $a \geq b \geq c$ tanpa alasan adalah kesalahan fatal pada ekspresi siklis dan dapat menyebabkan nilai nol.

↑ PENGEMBANGAN Hasil ini setara dengan $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq \frac{4}{27}(a + b + c)^3$ untuk $a, b, c \geq 0$. Coba juga buktikan versi $a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}(a + b + c)^3$ dengan teknik yang sama.

1.8

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Kesamaan di $a = b = c$, dan ruas kanan 1 mengisyaratkan pembagian “ $1 = \sum$ bagian”. Kita mencari pangkat r sehingga $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^r}{a^r+b^r+c^r}$; menyamakan turunan di titik kesamaan memberi $r = \frac{4}{3}$. Inilah cara menemukan eksponen yang tampak ajaib.

Penyelesaian. Misalkan $S = a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}$. Identy adalah menemukan batas bawah untuk setiap suku yang penyebutnya sama.

Klaim 1. $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{S}$.

Bukti klaim. Karena semua besaran positif, klaim setara dengan $S \geq a^{1/3}\sqrt{a^2 + 8bc}$, dan setelah dikuadratkan dengan $S^2 \geq a^{8/3} + 8a^{2/3}bc$. Faktorkan selisih kuadrat:

$$S^2 - a^{8/3} = (S - a^{4/3})(S + a^{4/3}) = (b^{4/3} + c^{4/3})(a^{4/3} + a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}).$$

Menurut AM-GM, $b^{4/3} + c^{4/3} \geq 2b^{2/3}c^{2/3}$ dan $a^{4/3} + a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3} \geq 4(a^{8/3}b^{4/3}c^{4/3})^{1/4} = 4a^{2/3}b^{1/3}c^{1/3}$. Mengalikan: $S^2 - a^{8/3} \geq 8a^{2/3}bc$. $\square$

Dengan cara yang sama (menukar peran variabel), $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{4/3}}{S}$ dan $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{4/3}}{S}$.

Kesimpulan. Menjumlahkan ketiganya: ruas kiri $\geq \frac{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}{S} = 1$. Kesamaan terjadi di $a = b = c$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Pada solusi IMO 2001, poin parsial diberikan untuk menemukan bentuk batas bawah dengan eksponen yang tepat. Bukti klaim harus lengkap, termasuk AM-GM empat suku.

↑ PENGEMBANGAN Soal ini juga dapat diselesaikan dengan Jensen pada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ dengan bobot yang tepat, atau dengan Hölder: $(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}})^2 (\sum a(a^2+8bc)) \geq (a+b+c)^3$. Coba kerjakan jalur Hölder sebagai latihan.

Bab 2 — Polinomial

2.1

Jawaban. Sisanya x .

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Pangkat besar modulo polinomial kecil: cari pangkat rendah yang kongruen dengan 1. Karena $x^2 + x + 1$ membagi $x^3 - 1$, pangkat dapat direduksi modulo 3.

Penyelesaian. Menurut algoritma pembagian, ada polinomial tunggal Q dan S dengan $\deg S \leq 1$ sehingga $x^{2026} = (x^2 + x + 1)Q(x) + S(x)$.

Klaim 1. $x^2 + x + 1$ membagi $x^{2025} - 1$.

Bukti klaim. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, dan $x^{2025} - 1 = (x^3)^{675} - 1$ habis dibagi $x^3 - 1$ karena $u - 1 \mid u^{675} - 1$ untuk $u = x^3$. $\square$

Maka $x^{2026} - x = x(x^{2025} - 1)$ habis dibagi $x^2 + x + 1$, sehingga $x^{2026} = (x^2 + x + 1)Q(x) + x$ untuk suatu polinomial Q .

Kesimpulan. Karena $\deg x = 1 < 2$, menurut ketunggalan sisa, sisanya x . $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Sebutkan ketunggalan sisa (derajat sisa < 2). Alternatif yang sah: substitusikan akar ω dari $x^2 + x + 1$ ke $x^{2026} = Q \cdot (x^2 + x + 1) + ax + b$.

2.2

Jawaban. -1 .

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Jumlah kebalikan akar selalu dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua polinomial simetris elementer: $\frac{e_2}{e_3}$.

Penyelesaian. Menurut Vieta untuk $x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$: $\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$, dan $\alpha\beta\gamma = -1$ (koefisien konstanta $-\alpha\beta\gamma = 1$). Karena $\alpha\beta\gamma \neq 0$, tidak ada akar nol, dan

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{-1} = -1. \quad \blacksquare$$

CATATAN PENILAIAN Tanda e_3 mudah salah: untuk $x^3 + \dots + d$, $\alpha\beta\gamma = -d$. Periksa juga bahwa tidak ada akar nol sebelum membagi.

2.3

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Untuk bilangan bulat, yang relevan hanya paritas; dan paritas $P(n)$ hanya bergantung pada paritas n karena $a - b \mid P(a) - P(b)$.

Penyelesaian.

Lema. Untuk polinomial berkoefisien bulat P dan bilangan bulat $u \neq v$, $u - v \mid P(u) - P(v)$.

Bukti lema. Tulis $P(x) = \sum c_k x^k$; maka $P(u) - P(v) = \sum c_k (u^k - v^k)$, dan setiap $u^k - v^k = (u - v)(u^{k-1} + \dots + v^{k-1})$ habis dibagi $u - v$. $\square$

Ambil bilangan bulat n . Jika n genap, lema dengan $v = 0$ memberi $2 \mid n \mid P(n) - P(0)$, jadi $P(n) \equiv P(0) \equiv 1 \pmod{2}$. Jika n ganjil, $2 \mid n - 1 \mid P(n) - P(1)$, jadi $P(n) \equiv P(1) \equiv 1 \pmod{2}$.

Kesimpulan. $P(n)$ ganjil untuk setiap bilangan bulat n , jadi $P(n) \neq 0$: P tidak memiliki akar bulat. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Lema $a - b \mid P(a) - P(b)$ sebaiknya dibuktikan atau dirujuk secara eksplisit, karena itulah inti argumennya.

2.4

Jawaban. $P(x) = x^2$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tebak jawaban dari persamaan: selisih $2x + 1$ adalah selisih x^2 . Lalu buktikan ketunggalan dengan polinomial selisih yang periodik.

Penyelesaian. Misalkan $R(x) = P(x) - x^2$, juga polinomial. Maka $R(x + 1) - R(x) = (P(x + 1) - P(x)) - ((x + 1)^2 - x^2) = (2x + 1) - (2x + 1) = 0$, jadi $R(x + 1) = R(x)$ untuk semua x .

Klaim 1. $R(n) = 0$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

Bukti klaim. Induksi: $R(0) = P(0) - 0 = 0$, dan $R(n + 1) = R(n)$. $\square$

Polinomial tak nol berderajat d memiliki paling banyak d akar, sedangkan R memiliki tak hingga banyak akar. Jadi $R \equiv 0$ dan $P(x) = x^2$.

Pemeriksaan. $P(0) = 0$ dan $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kalimat “polinomial periodik adalah konstan” perlu alasan: polinomial tak nol hanya memiliki berhingga banyak akar.

2.5

Jawaban. $P(n+1) = 2^{n+1} - 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Nilai 2^k di titik $0, \dots, n$ mengingatkan pada $\sum_j \binom{k}{j}$. Basis $\binom{x}{j}$ adalah “basis alami” untuk polinomial yang diketahui nilainya di bilangan bulat berurutan.

Penyelesaian. Untuk bilangan bulat $j \geq 0$ definisikan polinomial $\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{j!}$, berderajat tepat j (dengan $\binom{x}{0} = 1$). Untuk bilangan bulat $k \geq 0$, nilainya adalah koefisien binomial biasa, dan $\binom{k}{j} = 0$ jika $j > k$ (salah satu faktor pembilang nol).

Klaim 1. $Q(x) = \sum_{j=0}^n \binom{x}{j}$ memenuhi $Q(k) = 2^k$ untuk $k = 0, 1, \dots, n$.

Bukti klaim. Untuk $k \leq n$, suku dengan $j > k$ nol, jadi $Q(k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = 2^k$ menurut teorema binomial. $\square$

Klaim 2. $P = Q$.

Bukti klaim. Keduanya berderajat paling tinggi n dan bernilai sama di $n+1$ titik berbeda $0, 1, \dots, n$. Selisihnya berderajat paling tinggi n dengan $n+1$ akar, jadi nol. $\square$

Kesimpulan. $P(n+1) = Q(n+1) = \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} = 2^{n+1} - \binom{n+1}{n+1} = 2^{n+1} - 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Cara lain yang sah: selisih hingga. Jawaban 2^{n+1} (tanpa -1) adalah kesalahan umum karena lupa bahwa suku $\binom{n+1}{n+1}$ tidak ada di Q .

2.6

Jawaban. Terbukti (tidak ada).

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Soal “siklus” pada polinomial bulat: pakai $a-b \mid P(a) - P(b)$ tiga kali. Keterbagian yang berputar memaksa nilai mutlak sama.

Penyelesaian. Andaikan ada polinomial P berkoefisien bulat dan bilangan bulat berbeda a, b, c dengan $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$. Menurut lema pada Soal 2.3,

$$a-b \mid P(a) - P(b) = b-c, \quad b-c \mid P(b) - P(c) = c-a, \quad c-a \mid P(c) - P(a) = a-b.$$

Ketiga bilangan $a-b$, $b-c$, $c-a$ tak nol. Jika $u \mid v$ dengan $v \neq 0$, maka $|u| \leq |v|$. Maka $|a-b| \leq |b-c| \leq |c-a| \leq |a-b|$, sehingga ketiganya bernilai mutlak sama, misalnya $d > 0$. Tetapi $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, padahal jumlah tiga bilangan dari $\{d, -d\}$ adalah $\pm d$ atau $\pm 3d$, tidak nol.

Kesimpulan. Kontradiksi; jadi tidak ada polinomial seperti itu. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Langkah “ $u \mid v, v \neq 0 \Rightarrow |u| \leq |v|$ ” perlu syarat $v \neq 0$; di sini dijamin karena a, b, c berbeda.

2.7

Jawaban. Terbukti; $\sqrt[3]{2}$ irasional.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Uji akar rasional adalah alat standar untuk irasionalitas akar polinomial. Untuk $\sqrt[n]{m}$, cukup periksa bahwa tidak ada bilangan bulat yang pangkat n -nya m .

Penyelesaian. Misalkan $P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$ berkoefisien bulat dan $\frac{p}{q}$ akarnya dengan $\text{FPB}(p, q) = 1, q \geq 1$. Kalikan $P(p/q) = 0$ dengan q^n :

$$p^n = -q(c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2}q + \dots + c_0q^{n-1}).$$

Jadi $q \mid p^n$. Jika $q > 1$, ambil prima $r \mid q$; maka $r \mid p^n$, jadi $r \mid p$, bertentangan dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$. Maka $q = 1$ dan akarnya bulat.

Sekarang $\sqrt[3]{2}$ adalah akar polinomial monik $x^3 - 2$. Jika rasional, ia bulat. Tetapi $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ karena $1^3 < 2 < 2^3$, dan tidak ada bilangan bulat di antara 1 dan 2.

Kesimpulan. $\sqrt[3]{2}$ irasional. ■

CATATAN PENILAIAN Bukti bahwa $q = 1$ harus memakai $\text{FPB}(p, q) = 1$; tanpanya argumen tidak lengkap.

2.8

Jawaban. Terbukti (f tak tereduksi atas $\mathbb{Z}$).

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Eisenstein tidak dapat dipakai langsung ($3 \nmid 5$). Akar f memenuhi $|\alpha|^{n-1}|\alpha + 5| = 3$, relasi hasil kali yang cocok dengan hasil kali akar sebuah faktor. Nilai $f(-5) = 3$ adalah kebetulan yang dirancang pembuat soal; mengevaluasi di -5 adalah ide kunci.

Penyelesaian. Andaikan $f = gh$ dengan $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ berderajat positif. Koefisien utama f adalah 1, jadi koefisien utama g dan h adalah 1, 1 atau $-1, -1$; dengan mengalikan keduanya dengan -1 bila perlu, g dan h monik.

Langkah 1. $g(0)h(0) = f(0) = 3$, jadi salah satunya bernilai ± 1 . Tanpa mengurangi keumuman (peran g, h simetris), $|g(0)| = 1$. Misalkan $k = \deg g \geq 1$ dan $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ akar-akar kompleks g ; semuanya akar f , dan karena g monik, $\prod |\alpha_i| = |g(0)| = 1$.

Langkah 2. Setiap akar α dari f memenuhi $\alpha^{n-1}(\alpha + 5) = -3$, jadi $|\alpha|^{n-1}|\alpha + 5| = 3$. Mengalikan untuk $i = 1, \dots, k$ dan memakai Langkah 1: $\prod_i |\alpha_i + 5| = 3^k$.

Langkah 3. Karena $g(x) = \prod (x - \alpha_i)$, $|g(-5)| = \prod |-5 - \alpha_i| = 3^k$. Di sisi lain $g(-5)$ bulat dengan hasil kali $f(-5) = (-5)^n + 5(-5)^{n-1} + 3 = (-5)^{n-1}(-5 + 5) + 3 = 3$. Jadi $3^k = |g(-5)|$ membagi 3, sehingga $k = 1$.

Langkah 4. Maka $g(x) = x - r$ dengan r bulat, r akar f , dan $|r| = |g(0)| = 1$. Tetapi $f(1) = 9 \neq 0$ dan $f(-1) = (-1)^n - 5(-1)^{n-1} + 3 = 3 - 4(-1)^n \in \{-1, 7\}$, tak nol.

Kesimpulan. Kontradiksi; f tidak dapat difaktorkan. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Poin parsial diberikan untuk langkah “salah satu faktor bernilai ± 1 di 0” dan untuk relasi $|g(-5)| = 3^{\deg g}$. Kasus akhir (akar bulat ± 1) wajib diperiksa.

↑ **PENGEMBANGAN** Dengan argumen serupa buktikan bahwa $x^n + 4x^{n-1} + 2$ tak tereduksi (petunjuk: Eisenstein dengan $p = 2$ langsung berlaku). Coba juga $x^n + px^{n-1} + q$ untuk prima q dan p yang dipilih agar $f(-p) = q$.

Bab 3 — Persamaan Fungsional

3.1

Jawaban. $f(x) = x^3 + 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Persamaan menghubungkan $f(x)$ dan $f(-x)$; substitusi $x \rightarrow -x$ memberi persamaan kedua, dan dua persamaan linear dalam dua “tak diketahui” dapat diselesaikan.

Penyelesaian. Tulis $P(x)$ untuk persamaan $2f(x) + f(-x) = x^3 + 3$. $P(-x)$ memberi $2f(-x) + f(x) = -x^3 + 3$. Kalikan $P(x)$ dengan 2 dan kurangkan $P(-x)$: $4f(x) - f(x) = 2x^3 + 6 + x^3 - 3$, yaitu $3f(x) = 3x^3 + 3$. Jadi setiap solusi harus $f(x) = x^3 + 1$.

Pemeriksaan. $2(x^3 + 1) + ((-x)^3 + 1) = 2x^3 + 2 - x^3 + 1 = x^3 + 3$.

Kesimpulan. Satu-satunya solusi $f(x) = x^3 + 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Selalu periksa jawaban di persamaan asli. Tanpa pemeriksaan, solusi dianggap belum lengkap (biasanya dipotong satu poin).

3.2

Jawaban. $f(x) = \frac{2}{x} - x$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pola sama dengan 3.1: $x \rightarrow \frac{1}{x}$ adalah involusi, jadi dua substitusi membentuk sistem tertutup.

Penyelesaian. Tulis $P(x)$: $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = 3x$ untuk $x \neq 0$. $P(\frac{1}{x})$: $f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = \frac{3}{x}$, jadi $f(\frac{1}{x}) = \frac{3}{x} - 2f(x)$. Substitusikan ke $P(x)$: $f(x) + \frac{6}{x} - 4f(x) = 3x$, yaitu $3f(x) = \frac{6}{x} - 3x$, jadi $f(x) = \frac{2}{x} - x$.

Pemeriksaan. $\frac{2}{x} - x + 2(2x - \frac{1}{x}) = \frac{2}{x} - x + 4x - \frac{2}{x} = 3x$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Daerah asal $x \neq 0$ harus diperhatikan; substitusi $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sah karena memetakan daerah asal ke dirinya sendiri.

3.3

Jawaban. Terbukti (tidak ada fungsi seperti itu).

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Terapkan f pada persamaan dan juga terapkan persamaan pada $f(n)$: dua cara menghitung $f(f(f(n)))$ memberi relasi baru. Trik “hitung dua kali” ini sangat berguna.

Penyelesaian. Andaikan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ memenuhi $f(f(n)) = n + 1$ untuk semua n .

Klaim 1. $f(n + 1) = f(n) + 1$ untuk semua n .

Bukti klaim. Terapkan f pada kedua ruas persamaan: $f(f(f(n))) = f(n + 1)$. Terapkan persamaan pada bilangan $f(n)$: $f(f(f(n))) = f(n) + 1$. Bandingkan. $\square$

Dari klaim 1, dengan induksi ke atas dan ke bawah, $f(n) = n + c$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$, dengan $c = f(0) \in \mathbb{Z}$. Maka $f(f(n)) = n + 2c$, dan persamaan memberi $2c = 1$.

Kesimpulan. $c = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, kontradiksi. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Perluasan $f(n) = n + c$ ke bilangan negatif harus disebut (induksi ke bawah). Kontradiksi paritas harus ditulis eksplisit.

3.4

Jawaban. $f(x) = x^2 + cx$ untuk konstanta real c .

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Suku $2xy$ adalah “cacat” dari aditivitas yang ditimbulkan oleh x^2 . Kurangi x^2 untuk memperoleh persamaan Cauchy murni.

Penyelesaian. Misalkan $g(x) = f(x) - x^2$, fungsi kontinu. Maka $g(x + y) = f(x + y) - (x + y)^2 = f(x) + f(y) + 2xy - (x^2 + 2xy + y^2) = g(x) + g(y)$, jadi g aditif. Menurut Teorema 3.3 (aditif dan kontinu), $g(x) = cx$ dengan $c = g(1)$. Jadi $f(x) = x^2 + cx$.

Pemeriksaan. $(x + y)^2 + c(x + y) = (x^2 + cx) + (y^2 + cy) + 2xy$. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Menyebut kontinuitas sebagai syarat pemakaian teorema Cauchy wajib; tanpa itu kesimpulan $g(x) = cx$ tidak sah.

3.5

Jawaban. $f(x) = x$ dan $f(x) = -x$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA $x = 1$ membuat ruas kanan memuat y sendiri-an, tanda surjektivitas. Surjektivitas memungkinkan memilih $f(y_0) = -1$ yang membuat argumen $xf(y) + x$ menjadi nol.

Penyelesaian. Tulis $P(x, y)$: $f(xf(y) + x) = xy + f(x)$.

Klaim 1. f surjektif.

Bukti klaim. $P(1, y)$: $f(f(y) + 1) = y + f(1)$. Ketika y melalui $\mathbb{R}$, ruas kanan melalui semua bilangan real. $\square$

Klaim 2. f linear.

Bukti klaim. Menurut klaim 1 ada y_0 dengan $f(y_0) = -1$. $P(x, y_0)$: $f(-x + x) = xy_0 + f(x)$, jadi $f(x) = f(0) - y_0x$ untuk semua x . $\square$

Tulis $f(x) = kx + m$ dan substitusikan: ruas kiri $k(x(ky + m) + x) + m = k^2xy + k(m+1)x + m$, ruas kanan $xy + kx + m$. Membandingkan koefisien xy dan x : $k^2 = 1$ dan $k(m+1) = k$, sehingga $m = 0$ (karena $k \neq 0$) dan $k = \pm 1$.

Pemeriksaan. $f(x) = x$: $xy + x = xy + x$. $f(x) = -x$: $f(-xy + x) = xy - x = xy + f(x)$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Setelah menemukan f linear, bandingkan koefisien dengan cermat dan periksa kedua solusi. Kehilangan solusi $f(x) = -x$ adalah kesalahan umum.

3.6

Jawaban. Bagian 1: $f(n) = cn$ dengan $c \in \mathbb{N}$. Bagian 2: $f(n) = n$.

💡 **IDEKUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Bagian kedua: fungsi naik tegas pada bilangan asli adalah objek yang sangat kaku. Nilai di pangkat 2 diketahui, dan bilangan-bilangan di antaranya “terjepit”.

Penyelesaian. Bagian 1. Dengan $m = 1$: $f(n+1) = f(n) + f(1)$. Induksi memberi $f(n) = nf(1)$. Sebaliknya $f(n) = cn$ memenuhi $c(m+n) = cm + cn$ untuk setiap $c \in \mathbb{N}$.

Bagian 2.

Klaim 1. $f(1) = 1$ dan $f(2^k) = 2^k$.

Bukti klaim. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ dengan $f(1) \geq 1$, jadi $f(1) = 1$. Lalu $f(2^k) = f(2)^k = 2^k$ dengan induksi. □

Klaim 2. $f(n) = n$ untuk $2^k < n < 2^{k+1}$ ($k \geq 1$).

Bukti klaim. Nilai $f(2^k + 1) < f(2^k + 2) < \dots < f(2^{k+1} - 1)$ adalah $2^k - 1$ bilangan bulat berbeda yang terletak tegas di antara $f(2^k) = 2^k$ dan $f(2^{k+1}) = 2^{k+1}$. Selang terbuka itu memuat tepat $2^k - 1$ bilangan bulat, jadi nilai-nilai itu harus tepat $2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1$ berurutan. □

Kesimpulan. Setiap $n \geq 1$ adalah pangkat 2 atau terletak di antara dua pangkat 2 berurutan, jadi $f(n) = n$; fungsi ini memenuhi semua syarat. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Argumen penghitungan ($2^k - 1$ nilai dalam $2^k - 1$ tempat) harus ditulis eksplisit; itulah inti buktinya.

3.7

Jawaban. $f(x) = x$.

💡 **IDEKUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Ruas kanan memuat y sendirian, jadi surjektif; bentuk $f(x)^2$ mengisyaratkan membandingkan x dan $-x$. Tujuannya mencapai $f(f(y)) = y$ dan $f(x^2) = f(x)^2$, lalu aditivitas.

Penyelesaian. Tulis $P(x, y)$: $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$, dan $c = f(0)$.

Klaim 1. f bijektif.

Bukti klaim. Jika $f(a) = f(b)$, $P(0, a)$ dan $P(0, b)$ memberi $a + c^2 = f(c^2 + f(a)) = f(c^2 + f(b)) = b + c^2$, jadi $a = b$. $P(0, y)$: $f(c^2 + f(y)) = y + c^2$; ruas kanan mencakup semua bilangan real, jadi surjektif. □

Klaim 2. $f(0) = 0$.

Bukti klaim. Membandingkan $P(x, y)$ dan $P(-x, y)$ (ruas kiri sama): $f(x)^2 = f(-x)^2$. Menurut klaim 1 ada t dengan $f(t) = 0$; maka $f(-t)^2 = 0$, jadi $f(-t) = 0 = f(t)$, dan injektivitas memberi $t = -t, t = 0$. $\square$

Klaim 3. $f(f(y)) = y$ dan $f(x^2) = f(x)^2$.

Bukti klaim. $P(0, y)$ dan $P(x, 0)$ dengan $c = 0$. $\square$

Klaim 4. f aditif.

Bukti klaim. Untuk $s \geq 0$ dan sembarang y , $P(\sqrt{s}, f(y))$ dan klaim 3: $f(s + y) = f(y) + f(\sqrt{s})^2 = f(y) + f(s)$. Dengan $y = -s$: $0 = f(-s) + f(s)$. Untuk $a < 0$ dan sembarang b : $f(b) = f(-a + (a + b)) = f(-a) + f(a + b)$, jadi $f(a + b) = f(b) + f(a)$. $\square$

Klaim 5. f naik.

Bukti klaim. Untuk $s \geq 0$, $f(s) = f(\sqrt{s})^2 \geq 0$. Jika $y \geq x$, $f(y) = f(x) + f(y - x) \geq f(x)$. $\square$

Menurut Teorema 3.3, $f(x) = kx$. Klaim 3 memberi $k^2 = 1$ dan $kx^2 = k^2x^2$, jadi $k = 1$.

Pemeriksaan. $f(x^2 + y) = x^2 + y = y + x^2$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Pada IMO 1992, bukti $f(0) = 0$ adalah langkah yang paling sering dikerjakan secara keliru. Kemonotonan harus dibuktikan sebelum memakai teorema Cauchy di $\mathbb{R}$.

↑ PENGEMBANGAN Coba varian: tentukan semua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ dan tanpa mengandaikan apa pun (seperti di atas), lalu bandingkan dengan $f(x^2 + y) = f(x)^2 + f(y)$, yang juga memberi $f(x) = x$ atau $f \equiv 0$.

3.8

Jawaban. $f \equiv 0$ dan $f(n) = 2n + c$ untuk sembarang $c \in \mathbb{Z}$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Ruas kanan $f(f(a + b))$ hanya bergantung pada $a + b$. Maka ruas kiri juga hanya bergantung pada $a + b$: bandingkan (a, b) dengan $(a + 1, b - 1)$ atau pakai $a = 0$ untuk mengganti ruas kanan.

Penyelesaian. Tulis $P(a, b)$: $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$.

Klaim 1. $f(f(x)) = 2f(x) + f(0)$.

Bukti klaim. $P(0, x)$. $\square$

Klaim 2. $f(n + 1) - f(n)$ konstan.

Bukti klaim. Dengan klaim 1, $P(a, b)$ menjadi $f(2a) + 2f(b) = 2f(a + b) + f(0)$. Substitusi $a = 1$, $b = n$: $f(2) + 2f(n) = 2f(n + 1) + f(0)$, jadi $f(n + 1) - f(n) = \frac{f(2) - f(0)}{2} =: m$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Jadi $f(n) = mn + c$ dengan $c = f(0)$, dan m bulat karena $f(1) - f(0) = m$. Substitusi ke persamaan asli: $2ma + c + 2mb + 2c = m(m(a + b) + c) + c$ untuk semua a, b , yaitu $(2m - m^2)(a + b) + (2c - mc) = 0$. Maka $m^2 = 2m$ dan $2c = mc$.

Kasus $m = 0$. maka $c = 0$: $f \equiv 0$.

Kasus $m = 2$. c bebas: $f(n) = 2n + c$.

Pemeriksaan. $f(n) = 2n + c$: ruas kiri $4a + c + 4b + 2c$, ruas kanan $2(2a + 2b + c) + c$; sama. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pada IMO 2019, sebagian peserta lupa bahwa $f \equiv 0$ juga solusi. Pemeriksaan kedua keluarga solusi di akhir wajib.

↑ **PENGEMBANGAN** Selesaikan juga $f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$ untuk $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ dengan cara yang sama; langkah “selisih konstan” perlu dimodifikasi.

Bab 4 — Barisan dan Rekurensi

4.1

Jawaban. $a_n = 2^n + 3^n$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Rekurensi linear berkoefisien konstan: persamaan karakteristik memberi bentuk umum, dua nilai awal menentukan konstanta.

Penyelesaian. Persamaan karakteristik $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0$ memiliki akar berbeda 2 dan 3, jadi $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$. Dari $a_0 = A + B = 2$ dan $a_1 = 2A + 3B = 5$ diperoleh $B = 1$, $A = 1$.

Pemeriksaan. $a_2 = 5 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 13 = 4 + 9$ dan $a_3 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 35 = 8 + 27$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Periksa rumus pada satu atau dua suku berikutnya; kesalahan hitung konstanta mudah tertangkap.

4.2

Jawaban. Identitas benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Cari bentuk teleskopik: $k \cdot k!$ adalah selisih dua faktorial berurutan.

Penyelesaian. Untuk setiap $k \geq 1$, $k \cdot k! = ((k + 1) - 1)k! = (k + 1)! - k!$. Menjumlahkan dari $k = 1$ sampai n , setiap $(j)!$ dengan $2 \leq j \leq n$ muncul sekali dengan tanda + dan sekali dengan tanda –, sehingga tersisa $(n + 1)! - 1! = (n + 1)! - 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Bukti dengan induksi juga diterima; yang penting setiap langkah tertulis.

4.3

Jawaban. 9.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Penyebut berbentuk jumlah dua akar: rasionalkan untuk memperoleh selisih yang teleskopik.

Penyelesaian. Rasionalkan setiap suku: $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Jumlah dari $k = 1$ sampai 99 teleskopik: $(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = \sqrt{100} - 1 = 9$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tuliskan beberapa suku pertama dan terakhir untuk menunjukkan pembatalan.

4.4

Jawaban. Identitas benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Gunakan definisi Fibonacci “terbalik” untuk menulis setiap suku sebagai selisih.

Penyelesaian. Dari $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ diperoleh $F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$ untuk setiap $k \geq 1$. Maka $\sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n (F_{k+2} - F_{k+1}) = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$.

Pemeriksaan. $n = 3$: $1 + 1 + 2 = 4 = F_5 - 1 = 5 - 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Perhatikan indeks awal $F_1 = F_2 = 1$; kesalahan indeks memberi jawaban F_{n+2} atau $F_{n+1} - 1$ yang salah.

4.5

Jawaban. $a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Rekurensi pecahan $\frac{a}{1+na}$ menjadi linear setelah diambil kebalikannya.

Penyelesaian.

Klaim 1. $a_n > 0$ untuk semua n .

Bukti klaim. Induksi: $a_1 = 1 > 0$, dan jika $a_n > 0$ maka $1 + na_n > 0$ sehingga $a_{n+1} > 0$. □

Karena itu kita boleh mengambil kebalikan: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1+na_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n$. Misalkan $b_n = \frac{1}{a_n}$; maka $b_{n+1} - b_n = n$ dan $b_1 = 1$, sehingga $b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$.

Pemeriksaan. $a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ dan $a_3 = \frac{1/2}{1+1} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Positivitas suku harus dibuktikan sebelum mengambil kebalikan; tanpa itu pembagian dengan nol belum dikecualikan.

4.6

Jawaban. $x_n = 2^{2^n} + 2^{-2^n}$ dan $\lfloor x_n \rfloor = 2^{2^n}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** $x^2 - 2$ adalah rumus sudut ganda untuk $t + \frac{1}{t}$: $(t + \frac{1}{t})^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Mengenali ini mengubah iterasi menjadi pangkat.

Penyelesaian. Misalkan $P(n)$: $x_n = t_n + \frac{1}{t_n}$ dengan $t_n = 2^{2^n}$.

Langkah 1. $P(0)$: $x_0 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ dan $t_0 = 2$.

Langkah 2. Jika $P(n)$, maka $x_{n+1} = x_n^2 - 2 = t_n^2 + 2 + \frac{1}{t_n^2} - 2 = t_n^2 + \frac{1}{t_n^2}$, dan $t_n^2 = 2^{2 \cdot 2^n} = 2^{2^{n+1}} = t_{n+1}$.

Karena $t_n \geq 2$, $0 < \frac{1}{t_n} < 1$, sehingga $t_n < x_n < t_n + 1$ dan $\lfloor x_n \rfloor = t_n = 2^{2^n}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Basis induksi dan pembuktian $0 < 2^{-2^n} < 1$ harus ditulis untuk menentukan bagian bulat.

4.7

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Bandingkan jumlah dengan integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$; versi diskretnya adalah teleskopik $2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Penyelesaian.

Klaim 1. $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ untuk setiap $k \geq 1$.

Bukti klaim. Karena $0 \leq \sqrt{k-1} < \sqrt{k}$, $2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$. □

Menjumlahkan klaim 1 untuk $k = 1, \dots, n$: ruas kanan teleskopik menjadi $2(\sqrt{n} - \sqrt{0}) = 2\sqrt{n}$.

Kesimpulan. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Ketaksamaan tegas perlu dijelaskan (dari $\sqrt{k-1} < \sqrt{k}$).

4.8

Jawaban. Semua suku bulat; bahkan $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Hitung beberapa suku: 1, 1, 3, 11, 41. Pola $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ terlihat. Untuk membuktikannya, bandingkan dua rekurensi berurutan; kombinasi $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2$ konstan adalah invariannya.

Penyelesaian.

Klaim 1. Semua suku positif.

Bukti klaim. Induksi: $a_1, a_2 > 0$, dan jika $a_n, a_{n+1} > 0$, maka $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} > 0$. □

Klaim 2. $\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$ tidak bergantung pada n .

Bukti klaim. Dari definisi, $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2$ dan $a_{n+3}a_{n+1} - a_{n+2}^2 = 2$. Kurangkan: $a_{n+3}a_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_n$, yaitu $a_{n+1}(a_{n+3} + a_{n+1}) = a_{n+2}(a_{n+2} + a_n)$. Bagi dengan $a_{n+1}a_{n+2} > 0$: $\frac{a_{n+3} + a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$. □

Dengan $a_3 = \frac{1+2}{1} = 3$, nilai konstan itu $\frac{a_3 + a_1}{a_2} = 4$. Jadi $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ untuk semua $n \geq 1$.

Kesimpulan. Karena $a_1 = a_2 = 1$ bulat dan rekurensi linear berkoefisien bulat, induksi memberi semua suku bulat: 1, 1, 3, 11, 41, 153, ... ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Positivitas (tidak membagi dengan nol) wajib. Tanpa rekurensi linear, bukti “semua bulat” sulit, karena pembagian dengan a_n belum tentu bulat.

↑ **PENGEMBANGAN** Buktikan dengan cara yang sama bahwa $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + 1}{a_n}$ memberi barisan bilangan bulat.

Bab 5 — Aljabar Simetris

5.1

Jawaban. 343.

 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Nyatakan pangkat tinggi dalam $x + y$ dan xy secara bertahap.

Penyelesaian. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 25 - 6 = 19$. Lalu $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 361 - 2 \cdot 9 = 343$. ■

 **CATATAN PENILAIAN** Kesalahan umum: $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2xy$ (lupa mengkuadratkan xy).

5.2

Jawaban. $\frac{1}{2}$.

 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Dengan $p = 0$, semua jumlah pangkat dapat dinyatakan dalam q dan r .

Penyelesaian. Dengan $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$: $p = 0$ dan $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$, jadi $1 = -2q$, $q = -\frac{1}{2}$. Selanjutnya $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr = \frac{1}{4}$. Maka $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. ■

 **CATATAN PENILAIAN** Tuliskan identitas yang dipakai; hasil tanpa jalur perhitungan sulit dinilai.

5.3

Jawaban. Satu-satunya solusi $x = y = z = 1$.

 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tiga jumlah pangkat menentukan e_1, e_2, e_3 melalui identitas Newton, sehingga x, y, z adalah akar polinomial kubik.

Penyelesaian. Misalkan e_1, e_2, e_3 polinomial simetris elementer dan $s_k = x^k + y^k + z^k$. Identitas Newton: $s_1 = e_1 = 3$; $s_2 = e_1s_1 - 2e_2$, jadi $3 = 9 - 2e_2$ dan $e_2 = 3$; $s_3 = e_1s_2 - e_2s_1 + 3e_3$, jadi $3 = 9 - 9 + 3e_3$ dan $e_3 = 1$. Maka x, y, z adalah ketiga akar $t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3$, sehingga $x = y = z = 1$.

Pemeriksaan. $1 + 1 + 1 = 3$ untuk ketiga persamaan. ■

 **CATATAN PENILAIAN** Pastikan menyimpulkan bahwa x, y, z adalah *semua* akar polinomial itu, sehingga solusinya tunggal.

5.4

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Syarat pecahan diubah menjadi relasi p, q, r , faktorisasi $(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r$ menyelesaikan.

Penyelesaian. Dengan p, q, r seperti biasa ($r \neq 0, p \neq 0$), $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{q}{r}$. Syarat soal $\frac{q}{r} = \frac{1}{p}$ setara dengan $pq = r$.

Klaim 1. $(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r$.

Bukti klaim. Karena $a+b = p-c$ dan seterusnya, ruas kiri $(p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc = pq - r$. $\square$

Kesimpulan. $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$, jadi salah satu dari $a+b, b+c, c+a$ bernilai nol. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Syarat $a+b+c \neq 0$ dan $abc \neq 0$ diperlukan agar persamaan terdefinisi; sebutkan.

5.5

Jawaban. $n = 1$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Untuk n ganjil, $4^n = 4 \cdot (2^k)^4$ membuat bentuk $a^4 + 4b^4$ muncul. Sophie Germain adalah satu-satunya faktorisasi yang cocok.

Penyelesaian.

Kasus 1: n genap. n^4 dan 4^n genap, jadi $n^4 + 4^n$ genap dan lebih dari 2: bukan prima.

Kasus 2: $n = 1$. $1 + 4 = 5$, prima.

Kasus 3: $n = 2k + 1$ dengan $k \geq 1$. Tulis $4^n = 4 \cdot 4^{2k} = 4(2^k)^4$. Identitas Sophie Germain $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ dengan $a = n, b = 2^k$:

$$n^4 + 4^n = (n^2 + 2^{2k+1} + n2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} - n2^{k+1}).$$

Faktor kedua sama dengan $(n - 2^k)^2 + 2^{2k} \geq 2^{2k} \geq 4$, dan faktor pertama lebih besar lagi. Jadi $n^4 + 4^n$ adalah hasil kali dua bilangan yang lebih dari 1.

Kesimpulan. Hanya $n = 1$ yang memenuhi. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Membuktikan bahwa kedua faktor lebih dari 1 adalah bagian penting; tanpa itu faktorisasi tidak membuktikan komposit.

5.6

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Batas satu variabel pada sistem simetris: nyatakan dua variabel lain sebagai akar persamaan kuadrat, lalu syarat diskriminan.

Penyelesaian. Karena syaratnya simetris, cukup membuktikan $0 \leq a \leq 4$. Dari syarat, $b+c = 6-a$ dan $bc = 9 - a(b+c) = 9 - a(6-a) = a^2 - 6a + 9$. Bilangan real b, c adalah akar $t^2 - (b+c)t + bc = 0$, sehingga diskriminannya tak negatif: $(b+c)^2 - 4bc \geq 0$. Substitusi:

$$(6-a)^2 - 4(a^2 - 6a + 9) = 36 - 12a + a^2 - 4a^2 + 24a - 36 = 3a(4-a) \geq 0,$$

yaitu $0 \leq a \leq 4$.

Pemeriksaan. Batas tercapai: $(a, b, c) = (4, 1, 1)$ dan $(0, 3, 3)$ memenuhi kedua syarat. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan batas tercapai (contoh $(4, 1, 1)$ dan $(0, 3, 3)$) untuk memperlihatkan bahwa batas itu tajam.

5.7

Jawaban. Identitas benar.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Dengan $p = 0$ kedua ruas hanya bergantung pada q (dan r), jadi cukup menghitung.

Penyelesaian. Dengan $p = a + b + c = 0$: $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q = -2q$ dan $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr = q^2$. Maka $a^4 + b^4 + c^4 = (-2q)^2 - 2q^2 = 2q^2$ dan $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4q^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Hasil antara $\sum a^2b^2 = q^2$ memerlukan $p = 0$; sebutkan.

5.8

Jawaban. $(1, 1, 1)$ dan permutasi $(4, 4, -5)$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pangkat tiga bersama jumlah: identitas $(x + y + z)^3 - \sum x^3 = 3 \prod (x + y)$ mengubah soal menjadi hasil kali tetap. Substitusi $u = 3 - x$ membuat hasil kali dan jumlah keduanya kecil.

Penyelesaian.

Lema. $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Bukti lema. Dalam p, q, r : $p^3 - (p^3 - 3pq + 3r) = 3(pq - r)$, dan $pq - r = (x + y)(y + z)(z + x)$ (Soal 5.4). □

Dengan $x + y + z = 3$ dan $x^3 + y^3 + z^3 = 3$: $27 - 3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$, jadi $(3 - z)(3 - x)(3 - y) = 8$. Misalkan $u = 3 - x$, $v = 3 - y$, $w = 3 - z$: bilangan bulat dengan $uvw = 8$ dan $u + v + w = 9 - (x + y + z) = 6$.

Karena $uvw = 8 > 0$, banyak bilangan negatif di antara u, v, w adalah 0 atau 2, dan nilai mutlaknya adalah permutasi $\{1, 1, 8\}$, $\{1, 2, 4\}$, atau $\{2, 2, 2\}$.

Kasus 1: semua positif. Jumlahnya 10, 7, atau 6; hanya $(2, 2, 2)$ yang berjumlah 6.

Kasus 2: tepat dua negatif. Kemungkinannya (tanpa urutan) $(-1, -1, 8)$ jumlah 6; $(-1, 1, -8)$ jumlah -8 ; $(-1, -2, 4)$ jumlah 1; $(-1, 2, -4)$ jumlah -3 ; $(1, -2, -4)$ jumlah -5 ; $(-2, -2, 2)$ jumlah -2 . Hanya $(-1, -1, 8)$. Jadi $(u, v, w) = (2, 2, 2)$ atau permutasi $(-1, -1, 8)$, memberi $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ atau permutasi $(4, 4, -5)$.

Pemeriksaan. $4 + 4 - 5 = 3$ dan $64 + 64 - 125 = 3$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Analisis kasus harus lengkap, termasuk kombinasi tanda. Menemukan $(1, 1, 1)$ saja atau $(4, 4, -5)$ saja bernilai sebagian.

↑ **PENGEMBANGAN** Soal ini terkenal karena pertanyaan terbuka yang lebih dalam: semua solusi bulat $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ *tanpa* syarat $x + y + z = 3$. Selain $(1, 1, 1)$ dan permutasi $(4, 4, -5)$, pada 2019 ditemukan solusi raksasa dengan komputer.

Bab 6 — Keterbagian

6.1

Jawaban. Terbukti untuk kedua pernyataan.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Keterbagian oleh 6 dipecah menjadi keterbagian oleh 2 dan 3 yang relatif prima. Untuk $k!$, tafsiran kombinatorika $\binom{m+k}{k}$ adalah bilangan bulat karena menghitung sesuatu jauh lebih cepat daripada menghitung pangkat prima.

Penyelesaian. Tiga bilangan berurutan. Di antara $n, n+1$ ada bilangan genap, jadi $2 \mid n(n+1)(n+2)$. Di antara $n, n+1, n+2$ ada tepat satu kelipatan 3 (ketiganya memiliki sisa berbeda modulo 3), jadi $3 \mid n(n+1)(n+2)$. Karena $\text{FPB}(2, 3) = 1, 6$ membaginya.

k bilangan berurutan. Misalkan bilangannya $m+1, m+2, \dots, m+k$.

Kasus 1: $m \geq 0$. $\frac{(m+1) \cdots (m+k)}{k!} = \frac{(m+k)!}{m! k!} = \binom{m+k}{k}$, yaitu banyak cara memilih k objek dari $m+k$ objek, jadi bilangan bulat.

Kasus 2: bilangan-bilangan itu memuat 0. Hasil kalinya 0, habis dibagi $k!$.

Kasus 3: semuanya negatif. Hasil kalinya $(-1)^k$ kali hasil kali k bilangan asli berurutan, yang habis dibagi $k!$ menurut Kasus 1.

Kesimpulan. Dalam semua kasus $k!$ membagi hasil kali k bilangan bulat berurutan. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus bilangan negatif dan nol sering dilupakan; soal menyebut “bilangan bulat”, jadi ketiga kasus perlu disebut.

6.2

Jawaban. $\text{FPB}(2026, 3040) = 2 = 2 \cdot 3040 - 3 \cdot 2026$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Algoritma Euclid dilacak mundur untuk memperoleh kombinasi linear (Bézout). Setiap baris ditulis sebagai “sisa = yang dibagi – hasil bagi $\times$ pembagi”.

Penyelesaian. $1013 \cdot 3 + 1 = 3040$. Algoritma Euclid (setiap baris memakai $\text{FPB}(a, b) = \text{FPB}(b, a - qb)$):

$$3040 = 1 \cdot 2026 + 1014, \quad 2026 = 1 \cdot 1014 + 1012, \quad 1014 = 1 \cdot 1012 + 2, \quad 1012 = 506 \cdot 2 + 0.$$

Sisa tak nol terakhir 2, jadi $\text{FPB} = 2$. Lacak mundur: $2 = 1014 - 1012 = 1014 - (2026 - 1014) = 2 \cdot 1014 - 2026 = 2(3040 - 2026) - 2026 = 2 \cdot 3040 - 3 \cdot 2026$.

Pemeriksaan. $6080 - 6078 = 2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pemeriksaan akhir ($2 \cdot 3040 - 3 \cdot 2026 = 2$) sangat dianjurkan; kesalahan tanda saat melacak mundur sangat umum.

6.3

Jawaban. 60.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Rumus τ mengubah soal menjadi soal faktorisasi 12. Prinsip “eksponen besar untuk prima kecil” memberi kandidat terkecil untuk setiap pola.

Penyelesaian. Jika $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, maka $\tau(n) = (e_1 + 1) \cdots (e_k + 1)$. Kita perlu $\prod (e_i + 1) = 12$; faktorisasi 12 menjadi faktor ≥ 2 adalah $12, 6 \cdot 2, 4 \cdot 3, 3 \cdot 2 \cdot 2$. Untuk setiap pola, n terkecil diperoleh dengan memasang eksponen terbesar ke prima terkecil (menukar eksponen $e > f$ dari prima $p < q$ ke q akan memperbesar n). Kandidatnya $2^{11} = 2048, 2^5 \cdot 3 = 96, 2^3 \cdot 3^2 = 72$, dan $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Kesimpulan. Bilangan terkecil adalah 60 (pembaginya 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60). ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Semua pola faktorisasi 12 harus diperiksa; menyebut 60 tanpa membandingkan dengan 72 dan 96 belum membuktikan minimalitas.

6.4

Jawaban. $n = 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Ubah “ $d \mid$ polinomial” menjadi “ $d \mid$ sisa pembagian” dengan membagi polinomial. Sisanya konstanta kecil, sehingga pembagiannya terbatas.

Penyelesaian. Bagi $n^2 + 1$ oleh $n + 1$: $n^2 + 1 = (n + 1)(n - 1) + 2$. Karena $n + 1 \mid (n + 1)(n - 1)$, syarat $n + 1 \mid n^2 + 1$ setara dengan $n + 1 \mid 2$. Untuk $n \geq 1, n + 1 \geq 2$, jadi $n + 1 = 2$ dan $n = 1$.

Pemeriksaan. $n = 1: 2 \mid 2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Perhatikan batasan $n \geq 1$ (bilangan asli). Jika n boleh 0, jawaban $n = 0$ juga memenuhi.

6.5

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pisahkan faktor genap dan ganjil dari $(2n)!$. Faktor genap $2, 4, \dots, 2n$ adalah $2^n \cdot n!$.

Penyelesaian.

Klaim 1. $v_2((2n)!) = n + v_2(n!)$.

Bukti klaim. Pisahkan faktor genap dan ganjil: $(2n)! = (2 \cdot 4 \cdots 2n) \cdot (1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)) = 2^n n! \cdot (1 \cdot 3 \cdots (2n - 1))$. Faktor terakhir ganjil. □

Klaim 2. $v_2(n!) \leq n - 1$ untuk $n \geq 1$.

Bukti klaim. Menurut Legendre, $v_2(n!) = \sum_{i \geq 1} \lfloor n/2^i \rfloor$. Karena $\lfloor n/2^i \rfloor \leq n/2^i$ dan suku-suku dengan $2^i > n$ bernilai 0 padahal $n/2^i > 0$, $v_2(n!) < \sum_{i \geq 1} n/2^i = n$. $\square$

Kesimpulan. $v_2\binom{2n}{n} = v_2((2n)!) - 2v_2(n!) = n - v_2(n!) \geq 1$, jadi $\binom{2n}{n}$ genap. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Ketaksamaan $v_2(n!) \leq n - 1$ harus dibuktikan, bukan diasumsikan; perhatikan bahwa jumlah Legendre berhingga sedangkan deret geometri tak hingga.

6.6

Jawaban. Terbukti (bilangan itu adalah bilangan Catalan).

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pecahan yang harus dibuktikan bulat sering merupakan selisih atau kombinasi koefisien binomial. Penyebut $n!(n+1)!$ mengisyaratkan $\binom{2n}{n}$ dan $\binom{2n}{n+1}$.

Penyelesaian. Hitung selisih dua koefisien binomial:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} [(n+1) - n] = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

(Samakan penyebut: $n!n! \cdot (n+1) = n!(n+1)!$ dan $(n+1)!(n-1)! \cdot n = (n+1)!n!$.)

Kesimpulan. Ruas kiri adalah selisih dua bilangan bulat, jadi $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ bulat. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Samakan penyebut dengan hati-hati dan tunjukkan perhitungannya; langkah ini adalah seluruh isi bukti.

6.7

Jawaban. $(a, b) \in \{(2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Keterbagian $A \mid B$ dengan $A, B > 0$ memberi ketaksamaan $A \leq B$. Jika salah satu syarat “hampir” seimbang, ketaksamaan ini sangat membatasi selisih $b - a$.

Penyelesaian. Kedua syarat bertukar bila a, b ditukar, jadi cukup mencari solusi dengan $b \geq a$ lalu menambahkan pencerminannya. Penyebut harus tak nol; untuk $a = b = 1$ penyebutnya 0, jadi $(a, b) \neq (1, 1)$ dan $b \geq 2$.

Langkah 1: $b \leq a + 1$. Karena $b \geq a$ dan $b \geq 2$, $b^2 - a \geq b^2 - b > 0$. Pecahan $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ adalah bilangan bulat positif, jadi paling sedikit 1: $b^2 - a \leq a^2 + b$, yaitu $(b-a)(b+a) \leq a+b$, sehingga $b-a \leq 1$.

Langkah 2: $b = a$. Maka $a \geq 2$ dan $\frac{a^2+a}{a^2-a} = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$ harus bulat, jadi $a-1 \mid 2$ dan $a \in \{2, 3\}$. Kedua pecahan sama, jadi $(2, 2)$ dan $(3, 3)$ memenuhi.

Langkah 3: $b = a + 1$. Pecahan pertama $\frac{a^2+a+1}{(a+1)^2-a} = \frac{a^2+a+1}{a^2+a+1} = 1$. Pecahan kedua $\frac{b^2+a}{a^2-b} = \frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}$. Untuk $a = 1$: $\frac{5}{-1} = -5$; untuk $a = 2$: $\frac{11}{1} = 11$; keduanya bulat. Untuk $a \geq 3$ penyebut positif dan $a^2 + 3a + 1 = (a^2 - a - 1) + (4a + 2)$, jadi perlu $a^2 - a - 1 \mid 4a + 2$. Untuk $a \geq 6$, $a^2 - a - 1 - (4a + 2) = a^2 - 5a - 3 > 0$, sehingga pembagi lebih besar dari bilangan positif yang dibagi, mustahil. Untuk $a = 3, 4, 5$: $5 \nmid 14$, $11 \nmid 18$, $19 \nmid 22$.

Kesimpulan. Solusi dengan $b \geq a$: $(2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)$; dengan pencerminan diperoleh jawaban di atas. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pada APMO 2002, kesalahan umum adalah melupakan bahwa pecahan boleh negatif (misalnya $(1, 2)$ memberi -5) atau lupa pencerminan $(a, b) \leftrightarrow (b, a)$. Semua enam pasangan harus disebut.

↑ **PENGEMBANGAN** Coba varian: tentukan semua bilangan asli a, b sehingga $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ dan $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ keduanya bilangan *asli*. Periksa pasangan mana yang tersisa.

Bab 7 — Kongruensi

7.1

Jawaban. 29.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Dua digit terakhir berarti modulo 100. Cari orde 3 modulo 100 dengan menghitung pangkat bertahap ($3^5, 3^{10}, 3^{20}$), jauh lebih kecil daripada $\varphi(100) = 40$.

Penyelesaian. Kita hitung $3^{2026} \bmod 100$.

Klaim 1. $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$.

Bukti klaim. $3^5 = 243 \equiv 43, 3^{10} \equiv 43^2 = 1849 \equiv 49, 3^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1$. □

Karena $2026 = 20 \cdot 101 + 6, 3^{2026} = (3^{20})^{101} \cdot 3^6 \equiv 3^6 = 729 \equiv 29 \pmod{100}$.

Kesimpulan. Dua digit terakhirnya 29. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan perhitungan antara; penilai perlu melihat dari mana $3^{20} \equiv 1$ berasal.

7.2

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Nyatakan semua suku dalam pangkat yang sama, di sini 2^n , dengan mereduksi basis modulo 7.

Penyelesaian. Bekerja modulo 7: $9 \equiv 2$, jadi $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n$, dan $2^{n+2} = 4 \cdot 2^n$. Maka $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv (3 + 4)2^n = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{7}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Bukti induksi juga sah, tetapi bukti modular lebih ringkas dan lebih mudah diperiksa.

7.3

Jawaban. $x \equiv 2 \pmod{11}$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Persamaan linear modulo n diselesaikan dengan mengalikan invers koefisien. Invers ditemukan dengan coba-coba atau algoritma Euclid.

Penyelesaian. Karena $\text{FPB}(7, 11) = 1$, 7 memiliki invers modulo 11. Dari $7 \cdot 8 = 56 = 5 \cdot 11 + 1$, inversnya 8. Kalikan kedua ruas $7x \equiv 3$ dengan 8: $x \equiv 24 \equiv 2 \pmod{11}$. Karena perkalian dengan bilangan yang invertibel dapat dibalik, semua solusi adalah $x \equiv 2 \pmod{11}$.

Pemeriksaan. $7 \cdot 2 = 14 \equiv 3 \pmod{11}$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Sebutkan bahwa invers ada karena $\text{FPB}(7, 11) = 1$, dan tulis himpunan solusi lengkap sebagai kelas sisa.

7.4

Jawaban. $n \equiv 1$ atau $n \equiv 2 \pmod{6}$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Basis $2 \equiv -1 \pmod{3}$ membuat 2^n bergantung hanya pada paritas n . Kemudian gabungkan informasi modulo 2 dan modulo 3.

Penyelesaian. Karena $2 \equiv -1 \pmod{3}$, syaratnya $n(-1)^n + 1 \equiv 0$, yaitu $n(-1)^n \equiv -1 \pmod{3}$.

Kasus 1: n genap. $n \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$. Bilangan genap yang $\equiv 2 \pmod{3}$ tepat bilangan $\equiv 2 \pmod{6}$ (Teorema Sisa Cina).

Kasus 2: n ganjil. $-n \equiv -1$, jadi $n \equiv 1 \pmod{3}$; bilangan ganjil yang $\equiv 1 \pmod{3}$ tepat bilangan $\equiv 1 \pmod{6}$.

Pemeriksaan. $n = 1$: 3; $n = 2$: 9; $n = 3$: 25, tidak; $n = 7$: $897 = 3 \cdot 299$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Jawaban harus dinyatakan sebagai kelas modulo 6 (atau setara); jawaban “ n ganjil atau genap tertentu” tanpa rincian tidak cukup.

7.5

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Wilson memberi $(p-1)!$; hubungkan $(p-2)!$ dengan $(p-1)!$ melalui faktor $p-1 \equiv -1$.

Penyelesaian. Menurut teorema Wilson, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Tulis $(p-1)! = (p-1) \cdot (p-2)!$ dan $p-1 \equiv -1$: $-(p-2)! \equiv -1$, jadi $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$. (Untuk $p = 2$: $0! = 1 \equiv 1 \pmod{2}$, juga benar.) ■

✓ CATATAN PENILAIAN Kasus $p = 2$ sebaiknya disebut, walaupun trivial.

7.6

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Pangkat 2 dari orde ditentukan oleh fakta bahwa $2^{2^n} \equiv -1$ (bukan 1). Orde yang membagi 2^{n+1} tetapi tidak 2^n haruslah 2^{n+1} .

Penyelesaian. Misalkan $p \mid 2^{2^n} + 1$. Bilangan itu ganjil, jadi p ganjil dan $2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Misalkan $d = \text{ord}_p(2)$.

Klaim 1. $d = 2^{n+1}$.

Bukti klaim. Dari $2^{2^n} \equiv -1$ diperoleh $2^{2^{n+1}} \equiv 1$, jadi $d \mid 2^{n+1}$, yaitu $d = 2^j$ dengan $j \leq n+1$. Jika $j \leq n$, maka $2^{2^n} = (2^{2^j})^{2^{n-j}} \equiv 1$, padahal $2^{2^n} \equiv -1$ dan $1 \not\equiv -1 \pmod{p}$ karena $p > 2$. Jadi $j = n+1$. $\square$

Menurut teorema Fermat, $2^{p-1} \equiv 1$, sehingga menurut lema orde $d \mid p-1$.

Kesimpulan. $2^{n+1} \mid p-1$, yaitu $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Langkah 1 $\not\equiv -1 \pmod{p}$ memerlukan $p > 2$; sebutkan mengapa p ganjil.

7.7

Jawaban. 6.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Soal pangkat prima dalam $a^n - b^n$ adalah wilayah LTE. Periksa syaratnya dulu, lalu terapkan.

Penyelesaian. Terapkan LTE untuk $p = 3$, $a = 10$, $b = 1$, $n = 81$: syaratnya $3 \mid 10 - 1$ dan $3 \nmid 10 \cdot 1$, terpenuhi. Maka $v_3(10^{81} - 1) = v_3(10 - 1) + v_3(81) = 2 + 4 = 6$.

Pemeriksaan. Sebagai pembanding kecil, rumus yang sama memberi $v_3(10^3 - 1) = v_3(999) = 2 + 1 = 3$, dan memang $999 = 27 \cdot 37$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Menerapkan LTE tanpa memeriksa $p \mid a - b$ dan $p \nmid ab$ akan dipotong; syarat itu bagian dari teorema.

7.8

Jawaban. $(p, q) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Soal simetris tentang dua prima: pisahkan kasus prima 2, lalu untuk prima ganjil kaitkan kedua prima melalui orde. Perbandingan v_2 dari $p-1$ dan $q-1$ adalah invarian yang “berputar” dan menghasilkan kontradiksi.

Penyelesaian. Kondisi simetris dalam p, q .

Kasus 1: $p = q = 2$. $4 \mid 8$, memenuhi.

Kasus 2: $p = 2$, q ganjil. Perlu $2q \mid 4 + 2^q$. Karena q ganjil, $2 \mid 4 + 2^q$. Menurut Fermat $2^q \equiv 2 \pmod{q}$, jadi $q \mid 4 + 2^q$ setara dengan $q \mid 6$, sehingga $q = 3$; dan $6 \mid 12$. Diperoleh $(2, 3)$ dan dengan simetri $(3, 2)$.

Kasus 3: p, q keduanya ganjil. Jika $p = q$, maka $p^2 \mid 2^{p+1}$, mustahil. Jadi $p \neq q$. Dari $p \mid 2^p + 2^q$ dan $2^p \equiv 2 \pmod{p}$: $p \mid 2 + 2^q = 2(1 + 2^{q-1})$, dan karena p ganjil, $2^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Misalkan $d = \text{ord}_p(2)$.

Klaim 1. $v_2(d) = v_2(q-1) + 1$.

Bukti klaim. Dari $2^{2(q-1)} \equiv 1$ diperoleh $d \mid 2(q-1)$; dari $2^{q-1} \equiv -1 \not\equiv 1$ diperoleh $d \nmid q-1$. Tulis $q-1 = 2^s m$ dengan m ganjil. d membagi $2^{s+1}m$ tetapi tidak membagi $2^s m$; karena bagian ganjil d membagi m , satu-satunya kemungkinan adalah $v_2(d) = s+1$. $\square$

Karena $d \mid p-1$ (Fermat), $v_2(p-1) \geq v_2(d) > v_2(q-1)$. Menukar peran p dan q (kondisinya simetris) memberi $v_2(q-1) > v_2(p-1)$. Kontradiksi, jadi kasus 3 tidak memberi solusi.

Kesimpulan. Solusinya $(2, 2), (2, 3), (3, 2)$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Argumen $v_2(d) = v_2(q-1) + 1$ adalah inti bukti dan harus dijelaskan (mengapa $d \nmid q-1$ memaksa pangkat 2 tertentu). Kasus $p = q$ juga harus dieliminasi.

↑ **PENGEMBANGAN** Tentukan semua pasangan prima (p, q) dengan $pq \mid 5^p + 5^q$ (jawaban mencakup $(2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5), (5, 313), (313, 5)$). Teknik orde yang sama bekerja.

Bab 8 — Persamaan Diofantin

8.1

Jawaban. Tidak ada solusi.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Keterbagian ruas kiri oleh FPB koefisien adalah syarat perlu yang paling sederhana.

Penyelesaian. Untuk bilangan bulat x, y , $12x + 21y = 3(4x + 7y)$ habis dibagi 3, sedangkan $100 = 3 \cdot 33 + 1$ tidak. (Secara umum, $ax + by = c$ memiliki solusi bulat jika dan hanya jika $\text{FPB}(a, b) \mid c$; di sini $\text{FPB}(12, 21) = 3 \nmid 100$). $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan teorema yang dipakai atau tunjukkan faktorisasi $3(4x + 7y)$.

8.2

Jawaban. 9 pasangan.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Persamaan pecahan satuan menjadi bentuk hasil kali tetap setelah trik faktorisasi Simon.

Penyelesaian. Untuk bilangan asli x, y , persamaan setara (kalikan dengan $6xy$) dengan $6x + 6y = xy$, yaitu $(x-6)(y-6) = 36$.

Klaim 1. $x > 6$ dan $y > 6$.

Bukti klaim. Jika $x \leq 6$, maka $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{6}$, sehingga $\frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{x} \leq 0$, mustahil. Serupa untuk y . $\square$

Jadi $x-6$ dan $y-6$ bilangan asli dengan hasil kali 36. Setiap pembagi positif d dari 36 memberi tepat satu solusi $(x, y) = (6+d, 6+\frac{36}{d})$, dan sebaliknya.

Kesimpulan. Banyaknya $\tau(36) = \tau(2^2 \cdot 3^2) = 3 \cdot 3 = 9$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Eliminasi faktor negatif wajib; tanpa itu banyak solusi terhitung dua kali atau solusi palsu masuk.

8.3

Jawaban. Tidak ada solusi.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Selisih dua kuadrat: sisa modulo 4 sangat terbatas.

Penyelesaian. Kuadrat bilangan bulat bersisa 0 (bilangan genap) atau 1 (bilangan ganjil) modulo 4. Maka $x^2 - y^2$ modulo 4 adalah salah satu dari $0 - 0, 0 - 1, 1 - 0, 1 - 1$, yaitu 0, 3, 1, 0. Karena $2026 = 4 \cdot 506 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$, tidak ada solusi. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tabel sisa lengkap $(0 - 0, 0 - 1, 1 - 0, 1 - 1)$ sebaiknya ditulis.

8.4

Jawaban. $(x, y) = (1, 1)$ dan $(2, 3)$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Persamaan eksponensial dengan dua basis: gunakan modulo kecil untuk mendapatkan paritas eksponen, lalu faktorkan selisih kuadrat.

Penyelesaian.

Kasus 1: $y = 1$. $3^x = 3$, jadi $x = 1$.

Kasus 2: $y \geq 2$. Maka $2^y + 1 \equiv 1 \pmod{4}$, sedangkan $3^x \equiv (-1)^x \pmod{4}$. Jadi x genap, $x = 2m$ dengan $m \geq 1$, dan $2^y = 3^{2m} - 1 = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Kedua faktor positif dan hasil kalinya pangkat 2, jadi masing-masing pangkat 2; selisihnya 2. Satu-satunya dua pangkat 2 yang berselisih 2 adalah 2 dan 4 (jika keduanya ≥ 4 , selisihnya habis dibagi 4). Maka $3^m - 1 = 2$, $m = 1$, $x = 2$, dan $2^y = 8$, $y = 3$.

Pemeriksaan. $3 = 2 + 1$ dan $9 = 8 + 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Fakta “dua pangkat 2 berselisih 2 hanya 2 dan 4” perlu alasan (keterangan oleh 4).

8.5

Jawaban. $n = 1, 8, 49$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Syarat “bilangan segitiga adalah kuadrat” menjadi persamaan Pell setelah dikalikan 8 dan dilengkapi kuadrat.

Penyelesaian. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = m^2$ setara dengan $4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1$, yaitu $X^2 - 2Y^2 = 1$ dengan $X = 2n + 1$ dan $Y = 2m$. Sebaliknya, setiap solusi (X, Y) dengan X ganjil dan Y genap memberi pasangan (n, m) . Menurut teorema Pell, semua solusi bilangan asli adalah $X_k + Y_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$: $(3, 2), (17, 12), (99, 70), (577, 408), \dots$ Dari $X_{k+1} = 3X_k + 4Y_k$ dan $Y_{k+1} = 2X_k + 3Y_k$ terlihat (dengan induksi) X_k selalu ganjil dan Y_k selalu genap, dan barisan naik.

Kesimpulan. Tiga nilai terkecil $n = \frac{X-1}{2}$: 1, 8, 49, dengan jumlah 1, $36 = 6^2$, dan $1225 = 35^2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Perlu dijelaskan mengapa semua solusi Pell memenuhi syarat paritas (X ganjil, Y genap).

8.6

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Paritas memaksa semua variabel genap, tetapi membagi 2 mengubah persamaan. Solusinya: buktikan pernyataan untuk keluarga persamaan 2^k sekaligus, agar descent tertutup.

Penyelesaian. Kita buktikan pernyataan yang lebih kuat.

Klaim 1. Untuk setiap $k \geq 1$, persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 2^k xyz$ hanya memiliki solusi bulat $(0, 0, 0)$.

Bukti klaim. Langkah paritas. Misalkan (x, y, z) solusi. Ruas kanan genap, jadi banyak bilangan ganjil di antara x, y, z adalah 0 atau 2. Jika tepat dua ganjil, ruas kiri $\equiv 1 + 1 + 0 = 2 \pmod{4}$, sedangkan ruas kanan memuat faktor 2^k dan satu bilangan genap, jadi $\equiv 0 \pmod{4}$; kontradiksi. Jadi ketiganya genap. Langkah penurunan. Tulis $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$: $4(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 2^k \cdot 8x_1y_1z_1$, yaitu $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{k+1}x_1y_1z_1$. Jadi $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ solusi persamaan dengan $k + 1$. Mengulangi, x, y, z habis dibagi 2^j untuk setiap j , sehingga $x = y = z = 0$. □

Kesimpulan. Soal adalah kasus $k = 1$ dari klaim. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kesalahan umum adalah membagi 2 lalu mengklaim “persamaan yang sama”, padahal koefisiennya berubah.

8.7

Jawaban. Terbukti: nilainya selalu 5.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Persamaan kuadrat simetris dengan parameter k : sinyal *Vieta jumping*. Coba kasus kecil ($b = 1$) untuk menebak $k = 5$, lalu buktikan setiap pasangan dapat diturunkan ke kasus kecil.

Penyelesaian. Misalkan $k = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$ bilangan asli (perlu $ab \geq 2$). Tetapkan k . Di antara semua pasangan bilangan asli (a, b) dengan $a^2 + b^2 = k(ab - 1)$, pilih pasangan dengan $a \geq b$ dan $a + b$ minimum. Kita tunjukkan pada pasangan minimal $b = 1$, lalu hitung k .

Kasus 1: $b = 1$. $k = \frac{a^2+1}{a-1} = a + 1 + \frac{2}{a-1}$, jadi $a - 1 \mid 2$, $a \in \{2, 3\}$, dan $k = \frac{5}{1} = 5$ atau $k = \frac{10}{2} = 5$.

Kasus 2: $a = b \geq 2$. $k = \frac{2a^2}{a^2-1}$. Karena $\text{FPB}(a^2, a^2 - 1) = 1$, perlu $a^2 - 1 \mid 2$, mustahil untuk $a \geq 2$.

Kasus 3: $a > b \geq 2$. Pandang a sebagai akar $t^2 - kbt + (b^2 + k) = 0$. Akar lainnya, menurut Vieta, $a' = kb - a = \frac{b^2+k}{a}$: bulat (bentuk pertama) dan positif (bentuk kedua). Pasangan (a', b) juga memenuhi persamaan.

Klaim 1. $a' < a$.

Bukti klaim. Setara dengan $b^2 + k < a^2$, yaitu $a^2 + b^2 < (a^2 - b^2)(ab - 1)$. Karena $a - b \geq 1$, $a^2 - b^2 \geq a + b$. Juga $ab - 1 - (a + b) = (a - 1)(b - 1) - 2 \geq 0$ karena $a \geq 3, b \geq 2$. Maka $(a^2 - b^2)(ab - 1) \geq (a + b)^2 > a^2 + b^2$. □

Jadi pasangan (b, a') , setelah diurutkan, memiliki jumlah $a' + b < a + b$, bertentangan dengan minimalitas. Kasus 3 tidak mungkin terjadi pada pasangan minimal.

Kesimpulan. Pasangan minimal jatuh pada Kasus 1, sehingga $k = 5$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Bukti " $a' < a$ " adalah bagian tersulit dan harus lengkap; tanpa itu descent tidak berhenti.

↑ **PENGEMBANGAN** Soal serupa: jika a, b bilangan asli dengan $ab \mid a^2 + b^2 + 1$, buktikan $\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3$.

Bab 9 — Bilangan Prima

9.1

Jawaban. $p = 3$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Uji modulo 3 untuk ekspresi kuadrat dalam prima: $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ untuk $p \neq 3$.

Penyelesaian.

Kasus 1: $p = 3$. $8 \cdot 9 + 1 = 73$, prima.

Kasus 2: $p \neq 3$. Maka $3 \nmid p$ dan $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, sehingga $8p^2 + 1 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{3}$. Karena $8p^2 + 1 > 3$, bilangan itu komposit.

Kesimpulan. Hanya $p = 3$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan bahwa $8p^2 + 1 > 3$ sehingga kelipatan 3 itu bukan 3 sendiri.

9.2

Jawaban. $p = 3$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tiga bilangan dengan tiga sisa berbeda modulo 3 pasti memuat kelipatan 3.

Penyelesaian. Modulo 3: $p + 10 \equiv p + 1$ dan $p + 14 \equiv p + 2$. Tiga bilangan $p, p + 1, p + 2$ memiliki ketiga sisa modulo 3, jadi salah satu dari $p, p + 10, p + 14$ habis dibagi 3. Bilangan prima yang habis dibagi 3 adalah 3 itu sendiri. Karena $p + 10 \geq 12$ dan $p + 14 \geq 16$, haruslah $p = 3$; dan 3, 13, 17 memang prima. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Periksa kandidat $p = 3$ secara eksplisit.

9.3

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tiru bukti Euklides dengan $N \equiv 5 \pmod{6}$ agar faktor prima berbentuk $6k + 5$ dipaksa ada.

Penyelesaian. Andaikan hanya ada berhingga banyak prima berbentuk $6k + 5$, yaitu $q_1, \dots, q_m$ (daftar ini tak kosong karena memuat 5). Pandang $N = 6q_1q_2 \cdots q_m - 1$.

Klaim 1. Setiap faktor prima N bersisa 1 atau 5 modulo 6.

Bukti klaim. $N \equiv -1 \pmod{2}$ dan $N \equiv -1 \pmod{3}$, jadi $2, 3 \nmid N$. Prima selain 2, 3 bersisa 1 atau 5 modulo 6. $\square$

Klaim 2. N memiliki faktor prima $\equiv 5 \pmod{6}$.

Bukti klaim. Jika semua faktor prima $\equiv 1 \pmod{6}$, hasil kalinya $N \equiv 1 \pmod{6}$, padahal $N \equiv 5 \pmod{6}$. $\square$

Misalkan q faktor prima N dengan $q \equiv 5 \pmod{6}$. Maka $q = q_i$ untuk suatu i ; tetapi $q_i \mid N + 1$, jadi $q_i \mid (N + 1) - N = 1$. Kontradiksi.

Kesimpulan. Ada tak hingga banyak prima berbentuk $6k + 5$. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Perlu menjelaskan mengapa semua faktor prima N bersisa 1 atau 5 modulo 6.

9.4

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Seperti 9.1: modulo 3 memaksa $p = 3$, lalu periksa.

Penyelesaian. Jika $p \neq 3$, maka $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ dan $p^2 + 8 \equiv 0 \pmod{3}$ dengan $p^2 + 8 > 3$, sehingga $p^2 + 8$ tidak prima. Jadi hipotesis memaksa $p = 3$. Untuk $p = 3$: $p^2 + 8 = 17$ prima, dan $p^3 + 4 = 31$ prima. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Soal berbentuk implikasi; menunjukkan bahwa hipotesis hanya dipenuhi $p = 3$ sudah cukup, asalkan kesimpulan juga diperiksa.

9.5

Jawaban. $n = 1$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Ekspresi $n^4 + n^2 + 1$ adalah selisih dua kuadrat yang tersembunyi: $(n^2 + 1)^2 - n^2$.

Penyelesaian. Faktorkan dengan selisih dua kuadrat: $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$. Untuk $n \geq 2$: $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1 \geq 3$ dan $n^2 + n + 1 > n^2 - n + 1$, jadi bilangan itu hasil kali dua faktor lebih dari 1: komposit. Untuk $n = 1$: $1 + 1 + 1 = 3$, prima. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Tunjukkan kedua faktor lebih dari 1 untuk $n \geq 2$.

9.6

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Setiap suku k^{p-1} bernilai 1 modulo p menurut Fermat.

Penyelesaian. Untuk $1 \leq k \leq p-1$, $p \nmid k$, jadi menurut teorema Fermat $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Menjumlahkan $p-1$ kongruensi ini: $\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Sebutkan $p \nmid k$ untuk $1 \leq k \leq p-1$.

9.7

Jawaban. $p = 3$ dan $p = 7$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Faktorkan $2^{p-1} - 1$ sebagai selisih kuadrat. Kedua faktor relatif prima, sehingga “hasil kali = $p \times$ kuadrat” memaksa satu faktor kuadrat sempurna.

Penyelesaian. Untuk $p = 2$, $\frac{2-1}{2}$ tidak bulat. Misalkan p ganjil dan $\frac{2^{p-1}-1}{p} = m^2$. Tulis $k = \frac{p-1}{2} \geq 1$; maka $(2^k - 1)(2^k + 1) = pm^2$.

Klaim 1. Satu faktor adalah kuadrat sempurna dan yang lain p kali kuadrat sempurna.

Bukti klaim. Faktor $2^k - 1$ dan $2^k + 1$ ganjil dan berselisih 2, jadi FPB-nya membagi 2 dan bernilai 1. Prima p membagi tepat satu faktor; sebut faktor lainnya A . Untuk setiap prima r , jika $r \mid A$ maka $r \neq p$ dan r tidak membagi faktor lain, sehingga $v_r(A) = v_r(pm^2) = 2v_r(m)$ genap. Jadi A kuadrat sempurna. □

Kasus 1: $2^k + 1 = s^2$. $(s-1)(s+1) = 2^k$: dua pangkat 2 berselisih 2, yaitu 2 dan 4. Maka $s = 3$, $k = 3$, $p = 7$. Pemeriksaan: $\frac{63}{7} = 9 = 3^2$.

Kasus 2: $2^k - 1 = s^2$. Untuk $k \geq 2$, $2^k - 1 \equiv 3 \pmod{4}$, bukan kuadrat. Jadi $k = 1$, $p = 3$. Pemeriksaan: $\frac{3}{3} = 1 = 1^2$.

Kesimpulan. $p \in \{3, 7\}$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Argumen “faktor yang tidak dibagi p adalah kuadrat” perlu bukti melalui eksponen prima. Kedua kasus harus diselesaikan.

↑ PENGEMBANGAN Tentukan semua prima p sehingga $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ adalah pangkat tiga sempurna (petunjuk: faktorisasi yang sama, lalu $2^k \pm 1$ pangkat tiga).

Bab 10 — Kuadrat dan Pangkat

10.1

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Jumlah simetris di sekitar n memusnahkan suku ganjil. Faktor 5 muncul, jadi periksa modulo 25 melalui syarat $5 \mid n^2 + 2$.

Penyelesaian. Misalkan kelima bilangan $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$. Jumlah kuadratnya $5n^2 + 2(1 + 4) = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$. Andaikan ini sama dengan k^2 . Maka $5 \mid k^2$, jadi $5 \mid k$ dan $25 \mid k^2 = 5(n^2 + 2)$, sehingga $5 \mid n^2 + 2$, yaitu $n^2 \equiv 3 \pmod{5}$. Tetapi kuadrat modulo 5 hanya 0, 1, 4 (dari $0^2, \pm 1^2, \pm 2^2$).

Kesimpulan. Kontradiksi; jumlahnya tidak pernah kuadrat. ■

CATATAN PENILAIAN Langkah " $5 \mid k^2 \Rightarrow 25 \mid k^2$ " perlu disebut; ini yang membuat argumen berjalan.

10.2

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Dua digit terakhir menentukan sisa modulo 4 (dan 25).

Penyelesaian. Bilangan itu berakhir dengan dua digit 26, jadi dapat ditulis $N = 100t + 26$. Karena $4 \mid 100$, $N \equiv 26 \equiv 2 \pmod{4}$. Kuadrat bilangan bulat hanya bersisa 0 atau 1 modulo 4. Jadi N bukan kuadrat. ■

CATATAN PENILAIAN Periksa juga bahwa argumen berlaku berapa pun banyak pengulangan blok.

10.3

Jawaban. $n \in \{-1, 0\}$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Kuadrat "hampir" n^2 : jepit di antara n^2 dan $(n + 1)^2$. Kasus negatif direduksi ke positif dengan substitusi $m = -n - 1$.

Penyelesaian.

Kasus 1: $n \geq 1$. $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Tidak ada kuadrat tegas di antara dua kuadrat berurutan.

Kasus 2: $n \leq -2$. Tulis $m = -n - 1 \geq 1$; maka $n^2 + n + 1 = m^2 + m + 1$, yang menurut Kasus 1 bukan kuadrat.

Kasus 3: $n \in \{-1, 0\}$. Nilainya $1 = 1^2$.

Kesimpulan. Jawabannya $n = -1$ dan $n = 0$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus $n \leq -2$ sering dilupakan; substitusi $m = -n - 1$ adalah cara paling rapi.

10.4

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tebak akar kuadrat “kira-kira”: $n^2 + n$. Lalu periksa kuadrat tetangganya.

Penyelesaian. Misalkan $E = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$. Bandingkan dengan dua kuadrat berurutan: $(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2$, sehingga $E - (n^2 + n)^2 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 > 0$; $(n^2 + n + 1)^2 = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$, sehingga $(n^2 + n + 1)^2 - E = n^2 > 0$.

Kesimpulan. $(n^2 + n)^2 < E < (n^2 + n + 1)^2$, jadi E bukan kuadrat. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kedua selisih harus terbukti positif untuk semua $n \geq 1$.

10.5

Jawaban. Tidak ada n .

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Coba modulo kecil satu per satu: modulo 3 memberi paritas, modulo 5 menutup kasus genap.

Penyelesaian.

Kasus 1: $n = 0$. $2^0 + 3^0 = 2$, bukan kuadrat.

Kasus 2: $n \geq 1$. Modulo 3: $2^n + 3^n \equiv (-1)^n$. Kuadrat bersisa 0 atau 1 modulo 3, jadi $(-1)^n \equiv 1$, yaitu n genap, $n = 2m$ dengan $m \geq 1$. Modulo 5: $4^m + 9^m \equiv (-1)^m + (-1)^m = \pm 2$, yaitu 2 atau 3 (mod 5). Kuadrat modulo 5 hanya 0, 1, 4.

Kesimpulan. Tidak ada $n \geq 0$ yang memenuhi. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus $n = 0$ harus diperiksa terpisah.

10.6

Jawaban. $(x, y) = (59, 12)$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pangkat 2 di ruas kanan dan konstanta ganjil: modulo 3 membuat eksponen genap, lalu selisih kuadrat mengubah soal menjadi pembagi 615.

Penyelesaian.

Langkah 1: y genap. $615 = 3 \cdot 205 \equiv 0 \pmod{3}$, jadi $x^2 \equiv 2^y \equiv (-1)^y \pmod{3}$. Karena $3 \nmid 2^y$, $x^2 \not\equiv 0$, jadi $x^2 \equiv 1$ dan $(-1)^y = 1$: $y = 2k$.

Langkah 2: faktorisasi. $(2^k - x)(2^k + x) = 615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$. Kedua faktor positif (karena hasil kali dan faktor kedua positif), misalkan $d = 2^k - x < e = 2^k + x$ dengan $de = 615$ dan $d + e = 2^{k+1}$.

Langkah 3: periksa pasangan. $(1, 615): 616; (3, 205): 208; (5, 123): 128 = 2^7; (15, 41): 56$. Hanya $(5, 123)$ yang jumlahnya pangkat 2: $k = 6, x = \frac{123-5}{2} = 59, y = 12$.

Pemeriksaan. $59^2 + 615 = 3481 + 615 = 4096 = 2^{12}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Semua pasangan faktor harus diperiksa. Jawaban hanya $(59, 12)$.

10.7

Jawaban. $(x, y) = (6, 5)$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Selisih pangkat tiga tumbuh jauh lebih cepat daripada xy , jadi selisih $d = x - y$ harus kecil. Substitusi $x = y + d$ mengubah soal menjadi analisis kasus d .

Penyelesaian. Ruas kanan $xy + 61 > 0$, jadi $x^3 > y^3$ dan $x > y$. Tulis $x = y + d$ dengan $d \geq 1$. Maka $x^3 - y^3 = 3dy^2 + 3d^2y + d^3$ dan $xy = y^2 + dy$, sehingga persamaan menjadi

$$(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + (d^3 - 61) = 0.$$

Kasus 1: $d \geq 4$. Semua koefisien positif ($d^3 \geq 64 > 61$) dan $y \geq 1$, jadi ruas kiri positif: tidak ada solusi.

Kasus 2: $d = 1$. $2y^2 + 2y - 60 = 0$, yaitu $(y + 6)(y - 5) = 0$, jadi $y = 5, x = 6$.

Kasus 3: $d = 2$. $5y^2 + 10y - 53 = 0$ dengan diskriminan $100 + 1060 = 1160$, bukan kuadrat ($34^2 = 1156$).

Kasus 4: $d = 3$. $8y^2 + 24y - 34 = 0$, yaitu $4y^2 + 12y - 17 = 0$ dengan diskriminan $144 + 272 = 416$, bukan kuadrat.

Pemeriksaan. $216 - 125 = 91 = 30 + 61$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus $d \geq 4$ harus diberi alasan (semua koefisien positif).

10.8

Jawaban. $(x, y) \in \{(0, 2), (0, -2), (4, 23), (4, -23)\}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pisahkan x kecil, lalu faktorkan $y^2 - 1$. Pangkat 2 yang tinggi memaksa y dekat kelipatan 2^{x-1} ; substitusi menghasilkan persamaan yang membatasi m .

Penyelesaian. Hanya y^2 yang muncul, jadi cukup mencari $y \geq 0$ lalu menambahkan $-y$.

Langkah 1: x kecil. Ruas kiri harus bulat. Untuk $x \leq -2$, $2^x + 2^{2x+1} = 2^{2x+1}(1 + 2^{-x-1})$ bukan bulat (bilangan ganjil dibagi pangkat 2 positif); untuk $x = -1$ ruas kiri 2. Untuk $x = 0, 1, 2$: $4 = 2^2, 11, 37$. Jadi $x = 0$ memberi $y = 2$, dan misalkan selanjutnya $x \geq 3$.

Langkah 2: bentuk y . $2^x(1 + 2^{x+1}) = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$. Maka y ganjil, dan $y - 1, y + 1$ dua bilangan genap berurutan, sehingga salah satunya $\equiv 2 \pmod{4}$ (pangkat 2-nya tepat 1). Karena $v_2((y - 1)(y + 1)) = x$, faktor yang lain habis dibagi 2^{x-1} . Jadi $y = 2^{x-1}m + \varepsilon$ dengan m ganjil positif dan $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

Langkah 3: substitusi. $y^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + \varepsilon 2^x m$. Samakan dengan $2^x + 2^{2x+1}$ dan bagi dengan 2^x : $2^{x-2}m^2 + \varepsilon m = 1 + 2^{x+1}$, yaitu

$$2^{x-2}(8 - m^2) = \varepsilon m - 1.$$

Kasus $\varepsilon = 1$. Ruas kanan $m - 1 \geq 0$, jadi $m^2 \leq 8$ dan $m = 1$. Persamaan menjadi $7 \cdot 2^{x-2} = 0$, mustahil.

Kasus $\varepsilon = -1$. Ruas kanan $-(m + 1) < 0$, jadi $m^2 > 8$ dan $2^{x-2}(m^2 - 8) = m + 1$. Karena $x \geq 3$, $2^{x-2} \geq 2$, jadi $2(m^2 - 8) \leq m + 1$, yaitu $2m^2 - m - 17 \leq 0$, sehingga $m \leq 3$. Dengan m ganjil dan $m^2 > 8$: $m = 3$. Maka $2^{x-2} = 4$, $x = 4$, dan $y = 2^3 \cdot 3 - 1 = 23$.

Pemeriksaan. $1 + 16 + 512 = 529 = 23^2$ dan $1 + 1 + 2 = 4 = 2^2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pada IMO 2006, peserta sering melewatkan $x = 0$ atau lupa tanda $\pm y$. Analisis $\varepsilon = \pm 1$ harus lengkap.

↑ **PENGEMBANGAN** Selesaikan juga $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ dengan x bilangan bulat (termasuk negatif) dan periksa bahwa langkah 1 memang menangani semua $x < 0$.

Bab 11 — Segitiga Klasik

11.1

Jawaban. $\Delta = 12\sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$, $R = \frac{21\sqrt{5}}{10}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tiga sisi diketahui: Heron memberi luas, lalu r dan R mengikuti dari rumus $\Delta = rs = \frac{abc}{4R}$.

Penyelesaian. Misalkan $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$, jadi $s = \frac{a+b+c}{2} = 12$ dan $s - a = 5$, $s - b = 4$, $s - c = 3$. Heron: $\Delta = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$. Dari $\Delta = rs$: $r = \frac{12\sqrt{5}}{12} = \sqrt{5}$. Dari $\Delta = \frac{abc}{4R}$: $R = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 12\sqrt{5}} = \frac{504}{48\sqrt{5}} = \frac{21}{2\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$.

Pemeriksaan. $R \geq 2r$: $\frac{21\sqrt{5}}{10} \approx 4,70 \geq 2\sqrt{5} \approx 4,47$, sesuai ketaksamaan Euler. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Rasionalkan penyebut pada jawaban akhir, dan periksa kewajaran dengan $R \geq 2r$.

11.2

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Hubungkan dua rumus luas untuk segitiga siku-siku. Selisih kuadrat $(a + b)^2 - c^2 = 2ab$ adalah jembatannya.

Penyelesaian. Pada segitiga siku-siku di C , kaki-kakinya a, b , jadi $\Delta = \frac{1}{2}ab$. Juga $\Delta = rs = \frac{r}{2}(a+b+c)$. Maka $r = \frac{ab}{a+b+c}$. Karena $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras), $(a+b-c)(a+b+c) = (a+b)^2 - c^2 = 2ab$, sehingga $\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}$.

Kesimpulan. $r = \frac{a+b-c}{2}$. (Tafsiran: $r = s - c$ adalah panjang garis singgung dari C ke lingkaran dalam.) ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan Pythagoras sebagai alasan; tanpanya langkah $(a + b)^2 - c^2 = 2ab$ tidak berdasar.

11.3

Jawaban. Garis tinggi 12, garis berat $2\sqrt{37}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Segitiga 13-14-15 adalah segitiga Heron klasik: terdiri atas dua segitiga siku-siku 5-12-13 dan 9-12-15 yang ditempel. Pengetahuan ini memberi pemeriksaan instan.

Penyelesaian. Dengan $a = BC = 14$, $b = CA = 15$, $c = AB = 13$: $s = 21$ dan $\Delta = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = 84$. Garis tinggi dari A : $h_a = \frac{2\Delta}{a} = \frac{168}{14} = 12$. Garis berat dari A menurut Apollonius: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{450 + 338 - 196}{4} = 148$, jadi $m_a = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$.

Pemeriksaan. Kaki garis tinggi membagi BC menjadi $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ dan $\sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, dan $5 + 9 = 14$. Titik tengah BC berjarak $7 - 5 = 2$ dari kaki garis tinggi, jadi $m_a^2 = 12^2 + 2^2 = 148$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tuliskan rumus garis berat yang dipakai; hasil $2\sqrt{37}$ tanpa perhitungan sulit dinilai.

11.4

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Panjang ruas dari titik sudut ke sisi di hadapannya: Stewart. Teorema garis bagi memberi m dan n .

Penyelesaian. Misalkan garis bagi dari A memotong BC di D dan $d_a = AD$. Menurut teorema garis bagi, $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, dan $BD + DC = a$, sehingga $m = BD = \frac{ac}{b+c}$ dan $n = DC = \frac{ab}{b+c}$. Teorema Stewart: $b^2m + c^2n = a(d_a^2 + mn)$. Ruas kiri $\frac{ab^2c + abc^2}{b+c} = \frac{abc(b+c)}{b+c} = abc$. Dan $mn = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Membagi dengan a :

$$bc = d_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}, \quad \text{jadi} \quad d_a^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right). \quad \blacksquare$$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Perhitungan aljabar harus ditunjukkan; langkah $b^2m + c^2n = abc$ adalah kunci penyederhanaan.

11.5

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Titik singgung lingkaran singgung luar memiliki panjang singgung $s - b$, $s - c$ dari titik sudut; Ceva lalu tinggal perhitungan. Bandingkan dengan titik Gergonne ($s - a$, dst.) di bab.

Penyelesaian.

Klaim 1. Jika lingkaran singgung luar di hadapan A menyinggung BC di D , maka $BD = s - c$ dan $CD = s - b$.

Bukti klaim. Misalkan lingkaran itu menyinggung perpanjangan AB dan AC di T_c dan T_b . Garis singgung dari satu titik sama panjang: $AT_c = AT_b$, $BT_c = BD$, $CT_b = CD$. Maka $AT_c + AT_b = (AB + BT_c) + (AC + CT_b) = c + b + (BD + CD) = a + b + c = 2s$, sehingga $AT_c = s$, $BD = BT_c = s - c$, dan $CD = a - (s - c) = s - b$. $\square$

Dengan klaim yang sama untuk dua lingkaran singgung luar lainnya: titik singgung E pada CA memenuhi $CE = s - a$, $EA = s - c$; titik singgung F pada AB memenuhi $AF = s - b$, $FB = s - a$. Ketiga titik terletak di dalam sisi masing-masing.

Kesimpulan. Menurut Ceva, cukup memeriksa $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1$. Jadi AD , BE , CF bertemu di satu titik (titik Nagel). $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Rumus $BD = s - c$ harus dibuktikan, bukan diasumsikan; itulah bagian yang bernilai.

11.6

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Luas dengan alas sama dan tinggi sama selalu sama. Garis berat memberi pasangan alas sama; tiga persamaan luas memaksa semuanya sama.

Penyelesaian. Misalkan garis berat AD , BE , CF bertemu di titik berat G (D, E, F titik tengah BC, CA, AB). Segitiga GBD dan GDC memiliki alas sama panjang $BD = DC$ dan tinggi sama (jarak G ke BC), jadi luasnya sama; sebut x . Dengan cara sama $[GCE] = [GEA] = y$ dan $[GAF] = [GFB] = z$.

Langkah 1. Garis berat AD membagi ABC menjadi dua segitiga seluas (alas sama, tinggi sama): $[ABD] = [ADC]$, yaitu $2z + x = 2y + x$, jadi $y = z$.

Langkah 2. Garis berat BE : $[BCE] = [BEA]$, yaitu $2x + y = 2z + y$, jadi $x = z$.

Kesimpulan. $x = y = z$: keenam segitiga seluas, masing-masing $\frac{\Delta}{6}$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jangan mengasumsikan hasil (bahwa G membagi garis berat $2 : 1$) jika tidak diperlukan.

11.7

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Semua bangun yang dibentuk garis sejajar sisi sebangun dengan ABC . Karena akar luas sebanding dengan panjang sisi, cukup menunjukkan bahwa sisi-sisi yang sejajar BC berjumlah a .

Penyelesaian. Tiga garis melalui P yang sejajar sisi-sisi membentuk tiga segitiga kecil T_1, T_2, T_3 (masing-masing bertitik sudut P dan beralas pada satu sisi ABC) dan tiga jajaran genjang di sudut-sudut A, B, C .

Klaim 1. Setiap T_i sebangun dengan ABC .

Bukti klaim. Sisi-sisi T_i sejajar dengan sisi-sisi ABC , jadi sudut-sudutnya sama (sudut sehadap).

□

Misalkan x_i panjang sisi T_i yang sejajar BC , sehingga faktor kesebangunannya $\frac{x_i}{a}$ dan $\Delta_i = \Delta \left(\frac{x_i}{a}\right)^2$.

Klaim 2. $x_1 + x_2 + x_3 = a$.

Bukti klaim. Garis melalui P sejajar AB dan AC memotong BC di X dan Y ; segitiga kecil pada BC adalah PXY dengan $x_1 = XY$. Jajaran genjang di sudut B dibatasi BA , BC , garis PX , dan garis melalui P sejajar BC ; sisi-sisinya yang sejajar BC adalah BX dan sisi segitiga kecil pada AB yang sejajar BC . Sisi berhadapan jajaran genjang sama panjang, jadi $x_2 = BX$. Dengan cara yang sama di sudut C , $x_3 = YC$. Maka $x_1 + x_2 + x_3 = BX + XY + YC = BC = a$. □

Kesimpulan. $\sum \sqrt{\Delta_i} = \sqrt{\Delta} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{a} = \sqrt{\Delta}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Identifikasi sisi-sisi yang dijumlahkan (melalui jajaran genjang) harus jelas; ini bagian yang paling sering ditulis samar.

↑ **PENGEMBANGAN** Buktikan juga bahwa luas ketiga jajaran genjang berjumlah $2(\sqrt{\Delta_1\Delta_2} + \sqrt{\Delta_2\Delta_3} + \sqrt{\Delta_3\Delta_1})$, lalu simpulkan $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq \frac{\Delta}{3}$.

Bab 12 — Lingkaran

12.1

Jawaban. 6.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Garis dari titik luar yang memotong lingkaran dan garis singgung: kuasa titik.

Penyelesaian. P di luar lingkaran dan A lebih dekat ke P , jadi $PB = PA + AB = 9$. Misalkan PT garis singgung. Kuasa titik: $PT^2 = PA \cdot PB = 4 \cdot 9 = 36$, jadi $PT = 6$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pastikan $PB = PA + AB$, bukan AB saja.

12.2

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Gabungkan dua sifat sudut: jajaran genjang (sudut berhadapan sama) dan talibusur (sudut berhadapan berjumlah 180°).

Penyelesaian. Misalkan $ABCD$ jajaran genjang yang talibusur. Pada jajaran genjang sudut berhadapan sama: $\angle A = \angle C$. Pada segi empat talibusur sudut berhadapan berjumlah 180° : $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Maka $\angle A = \angle C = 90^\circ$, dan karena sudut berdekatan jajaran genjang berjumlah 180° , keempat sudutnya siku-siku.

Kesimpulan. $ABCD$ persegi panjang. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kesimpulan “persegi panjang” memerlukan keempat sudut siku-siku; sebutkan sudut-sudut lainnya.

12.3

Jawaban. 39.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Empat sisi segi empat talibusur dan hasil kali diagonal: Ptolemy.

Penyelesaian. Menurut teorema Ptolemy untuk segi empat talibusur $ABCD$: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC = 3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 39$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pasangkan sisi berhadapan dengan benar ($AB \cdot CD + AD \cdot BC$).

12.4

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tali busur sama panjang $\Rightarrow$ busur sama $\Rightarrow$ sudut keliling sama.

Penyelesaian. Titik-titik A, B, C, D terletak pada lingkaran dengan urutan itu. Sudut $\angle ADB$ adalah sudut keliling yang menghadap busur AB yang tidak memuat D , dan $\angle BDC$ menghadap busur BC yang tidak memuat D .

Klaim 1. Tali busur sama panjang menghadap busur sama besar.

Bukti klaim. Jika $AB = BC$, segitiga OAB dan OBC (O pusat) kongruen (sisi-sisi-sisi), jadi sudut pusat $\angle AOB = \angle BOC$. □

Menurut teorema sudut keliling, $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BDC$.

Kesimpulan. DB membagi dua $\angle ADC$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jelaskan mengapa kedua sudut menghadap busur yang tidak memuat D ; konfigurasi berpengaruh pada sudut keliling.

12.5

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Garis singgung persekutuan di T memberi titik M dengan tiga garis singgung sama panjang, sehingga T terletak pada lingkaran berdiameter AB .

Penyelesaian. Garis singgung persekutuan dalam di T memotong ruas AB di titik M .

Klaim 1. $MA = MT = MB$.

Bukti klaim. MA dan MT adalah dua garis singgung dari M ke lingkaran pertama, jadi sama panjang; MB dan MT adalah garis singgung dari M ke lingkaran kedua. □

Maka segitiga MAT dan MBT sama kaki: $\angle MTA = \angle MAT = \alpha$ dan $\angle MTB = \angle MBT = \beta$. Pada segitiga ATB , $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle ATB = \alpha + \beta$, sehingga $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$.

Kesimpulan. $\angle ATB = 90^\circ$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kejar sudut di segitiga ATB harus lengkap; menyebut “Thales” juga diterima jika $MA = MB = MT$ sudah terbukti.

12.6

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tali busur persekutuan adalah sumbu radikal. Tiga sumbu radikal: pusat radikal.

Penyelesaian. Misalkan lingkaran $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ berpusat O_1, O_2, O_3 . Jika ω_i dan ω_j berpotongan di X, Y , kuasa X dan Y terhadap keduanya nol, jadi X, Y terletak pada sumbu radikal ω_i, ω_j ; karena sumbu radikal adalah garis, garis itu adalah garis XY yang memuat tali busur persekutuan.

Kasus 1: O_1, O_2, O_3 **tidak segaris**. Sumbu radikal ω_1, ω_2 dan ω_2, ω_3 tegak lurus O_1O_2 dan O_2O_3 yang tidak sejajar, jadi berpotongan di satu titik K . K berkuasa sama terhadap ketiga lingkaran, jadi juga terletak pada sumbu radikal ω_1, ω_3 .

Kasus 2: O_1, O_2, O_3 **segaris**. Ketiga sumbu radikal tegak lurus garis yang sama, jadi sejajar (atau berimpit). ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus pusat segaris sering dilupakan; soal menyebut “atau sejajar” justru untuk kasus ini.

12.7

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Sudut siku-siku dari diameter memberi dua segi empat talibusur baru, masing-masing dengan kuasa titik yang cocok. Titik F (kaki tegak lurus) adalah titik bantu yang menghubungkan keduanya.

Penyelesaian. (Kita tinjau konfigurasi dengan E di dalam lingkaran.) Misalkan F kaki tegak lurus dari E ke AB ; F terletak pada ruas AB .

Klaim 1. B, C, E, F konsiklis.

Bukti klaim. Karena AB diameter, $\angle ACB = 90^\circ$; karena E pada ruas AC , $\angle ECB = 90^\circ$. Juga $\angle EFB = 90^\circ$. Jadi C dan F terletak pada lingkaran berdiameter EB . □

Klaim 2. A, D, E, F konsiklis.

Bukti klaim. Serupa, $\angle ADB = 90^\circ$ memberi $\angle ADE = 90^\circ$, dan $\angle AFE = 90^\circ$; jadi D, F pada lingkaran berdiameter AE . □

Kuasa titik A terhadap lingkaran klaim 1 (garis AEC dan AFB): $AE \cdot AC = AF \cdot AB$. Kuasa titik B terhadap lingkaran klaim 2 (garis BED dan BFA): $BE \cdot BD = BF \cdot BA$.

Kesimpulan. Menjumlahkan: $AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB(AF + FB) = AB^2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Konfigurasi (E di dalam, F di antara A dan B) perlu disebut; dengan panjang berarah bukti berlaku umum.

↑ **PENGEMBANGAN** Buktikan bahwa jika AC dan BD berpotongan di luar lingkaran, identitas yang sama berlaku dengan panjang berarah. Coba juga versi $AE \cdot AC = BE \cdot BD$.

Bab 13 — Transformasi Geometri

13.1

Jawaban. $P\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, nilai minimum 10.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Lintasan terpendek melalui garis: pantulkan salah satu titik agar lintasan menjadi garis lurus.

Penyelesaian. Misalkan $A' = (0, -3)$, pantulan A terhadap sumbu- x . Untuk setiap P pada sumbu- x , $PA = PA'$ (sumbu- x adalah sumbu ruas AA'). Maka menurut ketaksamaan segitiga $PA + PB = PA' + PB \geq A'B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, dengan kesamaan jika dan hanya jika P terletak pada ruas $A'B$. Garis $A'B$: $y = -3 + \frac{4}{3}x$, memotong sumbu- x di $x = \frac{9}{4}$, yang memang di antara 0 dan 6.

Pemeriksaan. $PA = \sqrt{\frac{81}{16} + 9} = \frac{15}{4}$ dan $PB = \sqrt{\frac{225}{16} + 25} = \frac{25}{4}$; jumlahnya 10. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan bahwa titik potong terletak di antara kedua ujung (agar ketaksamaan segitiga menjadi kesamaan).

13.2

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Koordinat kutub dengan pusat di titik potong membuat setiap pencerminan menjadi rumus sederhana untuk sudut.

Penyelesaian. Ambil O sebagai titik asal dan nyatakan titik $X \neq O$ dalam koordinat kutub (ρ, φ) .

Klaim 1. Pencerminan terhadap garis melalui O bersudut θ memetakan (ρ, φ) ke $(\rho, 2\theta - \varphi)$.

Bukti klaim. Pencerminan mempertahankan jarak ke O (yang terletak pada cermin) dan memetakan sudut $\theta + t$ ke $\theta - t$; dengan $t = \varphi - \theta$ diperoleh $2\theta - \varphi$. □

Misalkan garis pertama bersudut θ_1 dan kedua $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$. Komposisinya memetakan $(\rho, \varphi) \mapsto (\rho, 2\theta_1 - \varphi) \mapsto (\rho, 2\theta_2 - 2\theta_1 + \varphi) = (\rho, \varphi + 2\alpha)$, dan $O \mapsto O$.

Kesimpulan. Komposisinya adalah rotasi berpusat O sebesar 2α . ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Urutan komposisi menentukan arah rotasi; tulis dengan jelas cermin mana yang dipakai dulu.

13.3

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Segitiga sama sisi dan rotasi 120° adalah wilayah bilangan kompleks. Tuliskan pusat setiap segitiga luar sebagai rumus, lalu uji kriteria $a + \omega b + \omega^2 c = 0$.

Penyelesaian. Pakai bilangan kompleks dengan A, B, C bernilai a, b, c berorientasi berlawanan arah jarum jam. Maka C berada di kiri vektor $b - a$, sehingga segitiga sama sisi “di luar” AB berada di kanannya, yaitu searah $-i(b - a)$.

Klaim 1. Pusat segitiga sama sisi di luar AB adalah $R = \frac{a+b}{2} + k(b-a)$ dengan $k = \frac{-i}{2\sqrt{3}}$.

Bukti klaim. Pusat terletak pada sumbu AB , pada jarak $\frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$ (sepertiga tinggi $\frac{\sqrt{3}}{2}|b-a|$) dari titik tengah, di sisi luar. $\square$

Serupa, $P = \frac{b+c}{2} + k(c-b)$ dan $Q = \frac{c+a}{2} + k(a-c)$. Perhatikan $\frac{1}{2} - k = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\pi/6}$ dan $\frac{1}{2} + k = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}$. Dengan $\omega = e^{2\pi i/3}$, hitung koefisien a, b, c dalam $R + \omega P + \omega^2 Q$:

$$a : \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{i\pi/6} + \omega^2 e^{-i\pi/6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{i\pi/6} + e^{-5i\pi/6}) = 0,$$

$$b : \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{-i\pi/6} + \omega e^{i\pi/6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{-i\pi/6} + e^{5i\pi/6}) = 0,$$

$$c : \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega e^{-i\pi/6} + \omega^2 e^{i\pi/6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{i\pi/2} + e^{-i\pi/2}) = 0.$$

Kesimpulan. $R + \omega P + \omega^2 Q = 0$, jadi menurut kriteria di Bab 14, RPQ segitiga sama sisi. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Orientasi (“di luar”) harus ditetapkan dengan benar; tanda k yang salah memberi segitiga Napoleon dalam, yang juga sama sisi, tetapi itu soal lain.

13.4

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Persegi pada sisi segitiga: rotasi 90° atau bilangan kompleks dengan perkalian i .

Penyelesaian. Ambil A sebagai titik asal dan beri B, C nilai kompleks b, c dengan A, B, C berlawanan arah jarum jam, sehingga C di kiri AB dan B di kanan AC .

Klaim 1. $e = -ib$ dan $g = ic$.

Bukti klaim. Persegi $ABDE$ di luar segitiga berada di kanan AB ; titik E bersebelahan dengan A , diperoleh dengan memutar $\overrightarrow{AB}$ sebesar -90° . Persegi $ACFG$ di luar berada di kiri AC , jadi G diperoleh dengan memutar $\overrightarrow{AC}$ sebesar $+90^\circ$. $\square$

Maka $g - e = ic + ib = i(b + c) = i \cdot 2m$, dengan $m = \frac{b+c}{2}$ titik tengah BC .

Kesimpulan. Perkalian dengan i adalah rotasi 90° yang mempertahankan panjang, jadi $\overrightarrow{EG}$ tegak lurus $\overrightarrow{AM}$ dan $EG = 2AM$. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Penentuan $e = -ib$ dan $g = ic$ harus dibenarkan dengan orientasi.

13.5

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Dengan O sebagai titik asal, $H = a + b + c$; pencerminan terhadap titik tengah adalah $2m - h$.

Penyelesaian. Ambil pusat lingkaran luar O sebagai titik asal, sehingga $|a| = |b| = |c| = R$ dan titik tinggi $h = a + b + c$ (Bab 14). Titik tengah BC adalah $m = \frac{b+c}{2}$. Pantulan H terhadap M adalah $2m - h = b + c - (a + b + c) = -a$.

Kesimpulan. Titik $-a$ terletak pada lingkaran luar ($|-a| = R$) dan berseberangan diametral dengan A . ■

CATATAN PENILAIAN Sebutkan rumus $H = a + b + c$ dan syaratnya (titik asal di O).

13.6

Jawaban. $\angle APB = 135^\circ$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tiga jarak dari satu titik ke titik sudut persegi: rotasi 90° di sekitar titik sudut tengah memindahkan PC ke dekat PA , sehingga ketiga panjang berkumpul dalam satu segitiga yang ternyata siku-siku.

Penyelesaian. Misalkan ρ rotasi 90° berpusat B yang memetakan C ke A (ada karena $BC = BA$ dan $\angle CBA = 90^\circ$), dan $P' = \rho(P)$.

Klaim 1. $PP' = 2\sqrt{2}$, $\angle BPP' = 45^\circ$, dan $AP' = 3$.

Bukti klaim. $BP' = BP = 2$ dan $\angle PBP' = 90^\circ$, jadi segitiga PBP' siku-siku sama kaki: $PP' = 2\sqrt{2}$ dan $\angle BPP' = 45^\circ$. Rotasi mempertahankan jarak, jadi $AP' = \rho(C)\rho(P) = CP = 3$. □

Klaim 2. $\angle APP' = 90^\circ$.

Bukti klaim. $AP^2 + PP'^2 = 1 + 8 = 9 = AP'^2$, jadi menurut kebalikan Pythagoras siku-siku di P . □

Kesimpulan. Dalam konfigurasi ini (dapat diperiksa dengan koordinat: sisi persegi $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$), sinar PP' terletak di dalam sudut APB , sehingga $\angle APB = \angle APP' + \angle P'PB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. ■

CATATAN PENILAIAN Posisi relatif P' (di dalam sudut APB) memengaruhi apakah sudutnya $90^\circ + 45^\circ$ atau $90^\circ - 45^\circ$; ini perlu dibenarkan, misalnya dengan koordinat.

PENGEMBANGAN Dengan teknik yang sama, untuk titik P di dalam segitiga sama sisi dengan $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$, tentukan sisi segitiga (dibahas di Bab 13).

Bab 14 — Koordinat, Vektor, dan Bilangan Kompleks

14.1

Jawaban. $\frac{29}{2}$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Titik sudut diketahui koordinatnya: rumus tali sepatu.

Penyelesaian. Titik-titik $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 3)$, $(1, 4)$ tersusun berlawanan arah jarum jam dan membentuk segi empat sederhana. Rumus tali sepatu: $(0 \cdot 0 - 4 \cdot 0) + (4 \cdot 3 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 4 - 1 \cdot 3) + (1 \cdot 0 - 0 \cdot 4) = 0 + 12 + 17 + 0 = 29$, jadi luasnya $\frac{29}{2}$.

Pemeriksaan. Diagonal dari $(0, 0)$ ke $(5, 3)$ membagi menjadi dua segitiga: $\frac{1}{2}|4 \cdot 3 - 0 \cdot 5| = 6$ dan $\frac{1}{2}|5 \cdot 4 - 3 \cdot 1| = \frac{17}{2}$; jumlahnya $\frac{29}{2}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Urutan titik harus mengelilingi poligon; urutan acak dapat memberi luas salah.

14.2

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Titik tengah sebagai rata-rata vektor; selisih titik tengah berurutan tidak bergantung pada titik yang “dilewati”.

Penyelesaian. Misalkan titik tengah AB, BC, CD, DA adalah $M_1 = \frac{A+B}{2}$, $M_2 = \frac{B+C}{2}$, $M_3 = \frac{C+D}{2}$, $M_4 = \frac{D+A}{2}$. Maka $M_2 - M_1 = \frac{C-A}{2}$ dan $M_3 - M_4 = \frac{C-A}{2}$. Vektor $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, jadi sisi M_1M_2 dan M_4M_3 sejajar dan sama panjang.

Kesimpulan. $M_1M_2M_3M_4$ jajaran genjang (sisinya sejajar diagonal AC dan BD serta setengah panjangnya). ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan kesamaan vektor, bukan hanya kesejajaran.

14.3

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Pilih titik asal simetris (pusat persegi panjang) sehingga titik-titik berlawanan adalah $\pm$ vektor yang sama.

Penyelesaian. Ambil pusat persegi panjang sebagai titik asal. Diagonal persegi panjang saling membagi dua dan sama panjang, jadi $C = -A$, $D = -B$, dan $|A| = |B|$. Untuk titik P : $PA^2 + PC^2 = |P - A|^2 + |P + A|^2 = 2|P|^2 + 2|A|^2$ (suku $\pm 2P \cdot A$ saling menghapus), dan serupa $PB^2 + PD^2 = 2|P|^2 + 2|B|^2$.

Kesimpulan. Karena $|A| = |B|$, kedua jumlah sama. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jelaskan mengapa $|A| = |B|$ (diagonal sama panjang).

14.4

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Dengan O di titik asal, $|A + B + C|^2$ dapat dihitung dari hasil kali titik, yang dinyatakan dalam sisi.

Penyelesaian. Ambil O sebagai titik asal: $|A| = |B| = |C| = R$ dan $H = A + B + C$.

Klaim 1. $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Bukti klaim. $c^2 = |A - B|^2 = 2R^2 - 2A \cdot B$, jadi $A \cdot B = R^2 - \frac{c^2}{2}$; serupa untuk pasangan lain. Maka $OH^2 = |A + B + C|^2 = 3R^2 + 2(A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A) = 3R^2 + 6R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$. $\square$

Dari $OH^2 \geq 0$: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$. Dengan aturan sinus $a = 2R \sin A$, dst.: $4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq 9R^2$, jadi $\sum \sin^2 \leq \frac{9}{4}$.

Kesimpulan. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - \sum \sin^2 \geq \frac{3}{4}$, dengan kesamaan pada segitiga sama sisi ($O = H$). $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Hubungan $A \cdot B = R^2 - \frac{c^2}{2}$ adalah inti perhitungan; tuliskan.

14.5

Jawaban. $P = G$, titik berat.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Leibniz memisahkan bagian yang bergantung pada P ($3PG^2$) dari bagian tetap.

Penyelesaian. Menurut identitas Leibniz, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$. Suku dalam kurung tidak bergantung pada P , dan $3PG^2 \geq 0$ dengan kesamaan jika dan hanya jika $P = G$.

Kesimpulan. Minimum tercapai tepat di G , dengan nilai $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$. $\blacksquare$

CATATAN PENILAIAN Sebutkan bahwa minimum tercapai tepat di G , bukan hanya "paling kecil di G ".

14.6

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Empat titik pada lingkaran satuan: titik tinggi setiap segitiga adalah jumlah titik sudutnya. Jumlah keempat titik s muncul secara simetris.

Penyelesaian.

Klaim 1. Jika x, y, z pada lingkaran satuan, titik tinggi segitiga xyz adalah $x + y + z$.

Bukti klaim. Pusat lingkaran luarnya 0 ; gunakan teorema di Bab 14. $\square$

Misalkan $s = a + b + c + d$. Titik tinggi segitiga bcd, acd, abd, abc berturut-turut $s - a, s - b, s - c, s - d$. Pemetaan $\phi(z) = s - z$ memenuhi $|\phi(z) - \phi(w)| = |z - w|$, jadi isometri (pencerminan terhadap titik $\frac{s}{2}$), dan ϕ memetakan a, b, c, d ke keempat titik tinggi dengan urutan sama.

Kesimpulan. Segi empat titik tinggi adalah bayangan $abcd$ oleh isometri, jadi kongruen dengannya. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Penulisan pemetaan $z \mapsto s - z$ dan bukti bahwa ia isometri adalah inti solusi.

↑ **PENGEMBANGAN** Buktikan bahwa titik berat keempat segitiga bcd , acd , abd , abc membentuk segi empat yang sebangun dengan $abcd$ dengan faktor $\frac{1}{3}$ (petunjuk: titik beratnya $\frac{s-a}{3}$, dan pemetaan $z \mapsto \frac{s-z}{3}$).

Bab 15 — Titik–Titik Pusat Segitiga

15.1

Jawaban. $R = \frac{13}{2}$, $r = 2$, $OI = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Segitiga siku-siku: sisi miring diameter, dan $r = s - c$. Lalu Euler.

Penyelesaian. Segitiga 5-12-13 siku-siku ($25 + 144 = 169$). Sudut siku-siku menghadap diameter lingkaran luar, jadi $R = \frac{13}{2}$. Menurut Soal 11.2, $r = \frac{5+12-13}{2} = 2$. Rumus Euler: $OI^2 = R^2 - 2Rr = \frac{169}{4} - 26 = \frac{65}{4}$, jadi $OI = \frac{\sqrt{65}}{2}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan mengapa segitiganya siku-siku.

15.2

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Jumlah sudut segitiga BIC dengan setengah sudut di B dan C .

Penyelesaian. BI dan CI garis bagi, jadi $\angle IBC = \frac{B}{2}$ dan $\angle ICB = \frac{C}{2}$. Jumlah sudut segitiga BIC : $\angle BIC = 180^\circ - \frac{B+C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan langkah $180^\circ - \frac{B+C}{2}$.

15.3

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** $AH = 2OM_a$, dan OM_a adalah kaki segitiga siku-siku OM_aB dengan sudut di O sama dengan A (atau suplemennya).

Penyelesaian. Misalkan M_a titik tengah BC . Menurut Bab 15, $AH = 2OM_a$. Segitiga OBC sama kaki ($OB = OC = R$), jadi $OM_a \perp BC$ dan OM_a membagi dua sudut pusat $\angle BOC$. Sudut pusat itu $2A$ bila $A \leq 90^\circ$ dan $360^\circ - 2A$ bila $A > 90^\circ$; setengahnya A atau $180^\circ - A$. Pada segitiga siku-siku OM_aB : $OM_a = R \cos A$ atau $R \cos(180^\circ - A) = -R \cos A$, yaitu $OM_a = R|\cos A|$.

Kesimpulan. $AH = 2R|\cos A|$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus sudut tumpul menghasilkan nilai mutlak; sebutkan.

15.4

Jawaban. Terbukti (untuk segitiga lancip).

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Hitung kedua sudut secara terpisah dalam B ; keduanya $90^\circ - B$.

Penyelesaian. Misalkan D kaki garis tinggi dari A ; H pada AD . Pada segitiga siku-siku ABD : $\angle BAH = \angle BAD = 90^\circ - B$. Segitiga OAC sama kaki dengan sudut pusat $\angle AOC = 2B$ (sudut keliling B menghadap busur AC), jadi $\angle OAC = \frac{180^\circ - 2B}{2} = 90^\circ - B$.

Kesimpulan. $\angle BAH = \angle OAC$: garis AH dan AO simetris terhadap garis bagi $\angle A$ (isogonal). ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Soal ini untuk segitiga lancip; untuk kasus tumpul konfigurasi-nya berbeda.

15.5

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Tunjukkan kaki garis tinggi terletak pada lingkaran luar segitiga titik tengah melalui trapesium sama kaki; jari-jari dari homoteti.

Penyelesaian. Misalkan M_a, M_b, M_c titik tengah BC, CA, AB dan γ lingkaran luar segitiga $M_a M_b M_c$.

Klaim 1. Kaki garis tinggi D dari A terletak pada γ .

Bukti klaim. Jika $D = M_a$, jelas. Jika tidak, $M_b M_c \parallel BC$ (garis tengah), jadi $M_c M_b M_a D$ trapesium dengan sisi sejajar $M_b M_c$ dan DM_a . Pada segitiga siku-siku ADB , M_c titik tengah sisi miring AB , jadi $M_c D = \frac{AB}{2}$ (Soal F6.2). Garis tengah memberi $M_a M_b = \frac{AB}{2}$. Trapesium dengan kaki sama panjang adalah trapesium sama kaki, yang sudut-sudut alasnya sama dan karenanya talibusur. □

Dengan cara sama, kaki garis tinggi dari B dan C terletak pada γ . Jadi γ adalah lingkaran sembilan titik.

Klaim 2. Jari-jari γ adalah $\frac{R}{2}$.

Bukti klaim. Homoteti berpusat G dengan faktor $-\frac{1}{2}$ memetakan A, B, C ke M_a, M_b, M_c dan lingkaran luar ABC ke γ , mengalikan jari-jari dengan $\frac{1}{2}$. □

Kesimpulan. Jari-jari lingkaran sembilan titik adalah $\frac{R}{2}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Trapesium sama kaki talibusur perlu disebut sebagai fakta (atau dibuktikan).

15.6

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Pusat singgung luar terletak pada garis bagi luar; garis bagi dalam dan luar tegak lurus. Maka titik sudut ABC adalah kaki garis tinggi segitiga pusat singgung luar.

Penyelesaian.

Klaim 1. A terletak pada $I_B I_C$, dan $AI_A \perp I_B I_C$.

Bukti klaim. Pusat singgung luar I_B dan I_C masing-masing terletak pada garis bagi luar sudut A (setiap pusat singgung luar terletak pada garis bagi dalam satu sudut dan garis bagi luar dua sudut lainnya). Jadi A, I_B, I_C segaris pada garis bagi luar sudut A . Pusat I_A dan I terletak pada garis bagi dalam sudut A . Garis bagi dalam dan luar suatu sudut saling tegak lurus. $\square$

Menurut klaim 1, A adalah kaki garis tinggi dari I_A pada segitiga $I_A I_B I_C$, dan garis tinggi itu, yaitu garis AI_A , memuat I . Dengan cara sama, B dan C adalah kaki garis tinggi lainnya, dan garis tinggi BI_B, CI_C juga memuat I .

Kesimpulan. I terletak pada ketiga garis tinggi, jadi titik tinggi segitiga $I_A I_B I_C$. Lingkaran luar ABC melalui ketiga kaki garis tinggi segitiga itu; lingkaran yang melalui tiga kaki garis tinggi adalah lingkaran sembilan titik (Soal 15.5). $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Fakta " I_B, I_C pada garis bagi luar sudut A " harus disebut beserta alasannya.

↑ PENGEMBANGAN Akibatnya: pusat lingkaran luar ABC adalah titik tengah I dan pusat lingkaran luar $I_A I_B I_C$ (pusat lingkaran sembilan titik). Buktikan dan simpulkan bahwa jari-jari lingkaran luar $I_A I_B I_C$ adalah $2R$.

Bab 16 — Prinsip Sarang Merpati

16.1

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA “Jumlah atau selisih habis dibagi 10” berarti sisa sama atau sisa saling melengkapi. Pasangkan sisa r dengan $10 - r$ dalam satu sarang; sisa 0 dan 5 berpasangan dengan dirinya sendiri. Enam sarang untuk tujuh bilangan.

Penyelesaian. Definisikan enam “sarang” berdasarkan sisa modulo 10: $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{5\}$, $S_3 = \{1, 9\}$, $S_4 = \{2, 8\}$, $S_5 = \{3, 7\}$, $S_6 = \{4, 6\}$. Setiap bilangan bulat masuk tepat satu sarang menurut sisanya. Tujuh bilangan dan enam sarang: menurut prinsip sarang merpati ada dua bilangan x, y dalam sarang yang sama.

Kasus 1: sisanya sama. Maka $10 \mid x - y$.

Kasus 2: sisanya r dan $10 - r$. (hanya mungkin di $S_3 - S_6$) Maka $x + y \equiv r + (10 - r) \equiv 0 \pmod{10}$.

Kesimpulan. Selalu ada dua bilangan yang jumlah atau selisihnya habis dibagi 10. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Sarang harus dijelaskan lengkap, termasuk $\{0\}$ dan $\{5\}$. Menulis “ada 10 sisa” saja tidak cukup karena $7 < 10$.

16.2

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tiga bilangan berjumlah kelipatan 3 jika sisanya sama atau ketiganya berbeda. Pisahkan kedua kemungkinan itu.

Penyelesaian. Pandang sisa kelima bilangan modulo 3.

Kasus 1: ketiga sisa 0, 1, 2 muncul. Ambil satu bilangan dengan masing-masing sisa; jumlahnya $\equiv 0 + 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$.

Kasus 2: paling banyak dua sisa muncul. Lima bilangan dibagi ke paling banyak dua kelas, jadi menurut sarang merpati ada kelas dengan paling sedikit $\lceil 5/2 \rceil = 3$ bilangan. Tiga bilangan bersisa sama r berjumlah $\equiv 3r \equiv 0 \pmod{3}$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Kedua kasus harus ditangani; banyak siswa hanya menulis kasus “tiga sisa sama”.

16.3

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Terlalu banyak himpunan bagian (1023) untuk terlalu sedikit kemungkinan jumlah (≤ 936). Setelah menemukan dua himpunan berjumlah sama, buang irisannya agar saling lepas.

Penyelesaian. Misalkan M himpunan 10 bilangan dua digit, yaitu bilangan di $\{10, \dots, 99\}$.

Langkah 1: hitung sarang dan merpati. M memiliki $2^{10} - 1 = 1023$ himpunan bagian tak kosong (merpati). Jumlah unsur setiap himpunan bagian adalah bilangan bulat di antara 10 dan $90 + 91 + \dots + 99 = 945$, jadi paling banyak 936 nilai yang mungkin (sarang).

Langkah 2. Karena $1023 > 936$, ada dua himpunan bagian berbeda $X \neq Y$ dengan jumlah unsur sama.

Langkah 3: buat saling lepas. Buang unsur persekutuan: $X' = X \setminus Y$ dan $Y' = Y \setminus X$ saling lepas dan jumlahnya sama (kita mengurangi jumlah yang sama dari keduanya). Jika $X' = \emptyset$, maka $X \subseteq Y$ dan $Y' = Y \setminus X$ tak kosong berjumlah 0, mustahil karena semua unsur positif. Jadi keduanya tak kosong.

Kesimpulan. X' dan Y' adalah dua himpunan bagian yang diminta. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Langkah “buang irisan” dan bukti bahwa hasilnya tak kosong sering dilupakan, padahal soal meminta himpunan saling lepas dan tak kosong.

16.4

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Barisan pangkat modulo 1000 pasti berulang; pengulangan memberi pangkat yang kongruen 1 setelah membagi, yang sah karena 3 relatif prima dengan 1000.

Penyelesaian. Pandang 1001 bilangan $3^1, 3^2, \dots, 3^{1001}$ dan sisanya modulo 1000. Hanya ada 1000 sisa, jadi ada $1 \leq i < j \leq 1001$ dengan $3^i \equiv 3^j \pmod{1000}$, yaitu $1000 \mid 3^i(3^{j-i} - 1)$. Karena $\text{FPB}(3^i, 1000) = 1$, lema Euclid memberi $1000 \mid 3^{j-i} - 1$.

Kesimpulan. $3^{j-i} \equiv 1 \pmod{1000}$ dengan $j - i \geq 1$, jadi tiga digit terakhir 3^{j-i} adalah 001. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Alasan pembagian ($\text{FPB}(3, 1000) = 1$) wajib ditulis.

16.5

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Repunit 1, 11, 111, ... modulo n berulang; selisih dua repunit adalah bilangan 11 ... 100 ... 0.

Penyelesaian. Untuk $k \geq 1$ misalkan R_k bilangan yang terdiri atas k angka 1. Pandang $R_1, R_2, \dots, R_{n+1}$ modulo n . Ada $n + 1$ bilangan dan n sisa, jadi $R_i \equiv R_j \pmod{n}$ untuk suatu $1 \leq i < j \leq n + 1$.

Klaim 1. $R_j - R_i = R_{j-i} \cdot 10^i$.

Bukti klaim. R_j adalah $j - i$ angka 1 diikuti i angka 1; mengurangkan R_i menghapus i angka terakhir menjadi 0. □

Kesimpulan. $n \mid R_j - R_i$, dan $R_j - R_i$ adalah $j - i$ angka 1 diikuti i angka 0: kelipatan n yang hanya memuat angka 0 dan 1. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan bentuk selisihnya secara eksplisit.

16.6

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Butuh 3 titik dalam satu wilayah kecil: $51 > 2 \cdot 25$ menandakan 25 sarang. Periksa apakah persegi $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$ muat dalam lingkaran berjari-jari $\frac{1}{7}$.

Penyelesaian. Bagi persegi satuan menjadi 25 persegi kecil bersisi $\frac{1}{5}$ (grid 5×5 ; titik pada garis batas dimasukkan ke salah satu persegi yang memuatnya). Karena $51 > 2 \cdot 25$, prinsip sarang merpati memberi persegi kecil Q yang memuat paling sedikit $\lceil 51/25 \rceil = 3$ titik.

Klaim 1. Lingkaran berjari-jari $\frac{1}{7}$ yang sepusat dengan Q memuat Q .

Bukti klaim. Setiap titik Q berjarak paling jauh setengah diagonal, $\frac{\sqrt{2}}{10}$, dari pusat Q . Karena $(\frac{\sqrt{2}}{10})^2 = \frac{1}{50} < \frac{1}{49} = (\frac{1}{7})^2$, $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$. □

Kesimpulan. Ketiga titik di Q terletak di dalam lingkaran berjari-jari $\frac{1}{7}$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Perbandingan $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$ harus dibuktikan (misalnya dengan mengkuadratkan), bukan hanya dengan kalkulator.

16.7

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA “Beberapa hari berurutan berjumlah 21” berarti selisih dua jumlah awalan sama dengan 21. Letakkan a_i dan $a_i + 21$ dalam kotak yang sama.

Penyelesaian. Sebelas minggu terdiri atas 77 hari. Misalkan a_i total partai dari hari ke-1 sampai hari ke- i .

Langkah 1. Karena setiap hari minimal satu partai, $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77}$. Karena setiap minggu paling banyak 12 partai, $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$.

Langkah 2. Pandang 154 bilangan $a_1, \dots, a_{77}, a_1 + 21, \dots, a_{77} + 21$. Semuanya di $\{1, \dots, 153\}$ (karena $a_{77} + 21 \leq 153$). Menurut sarang merpati, dua di antaranya sama.

Langkah 3. Bilangan a_i berbeda-beda, dan bilangan $a_i + 21$ berbeda-beda, jadi kesamaannya berbentuk $a_j = a_i + 21$; karena barisan naik, $i < j$.

Kesimpulan. Pada hari ke- $(i + 1)$ sampai ke- j dimainkan tepat $a_j - a_i = 21$ partai. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Batas $a_{77} \leq 132$ dan hitungan $154 > 153$ adalah inti argumen; tuliskan keduanya.

↑ PENGEMBANGAN Buktikan dengan argumen yang sama bahwa untuk setiap $k \leq 21$ ada hari-hari berurutan dengan tepat k partai. Perhatikan di mana argumen berhenti bekerja untuk $k = 22$: 154 bilangan kini berada di $\{1, \dots, 154\}$, sehingga sarang merpati sederhana tidak lagi cukup.

Bab 17 — Invarian dan Monovarian

17.1

Jawaban. Tidak dapat.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Operasi tampak seperti rotasi ($0,6 = \cos \theta$, $0,8 = \sin \theta$), dan rotasi mempertahankan panjang. Jadi jumlah kuadrat invarian.

Penyelesaian.

Klaim 1. Jumlah kuadrat ketiga bilangan invarian.

Bukti klaim. Operasi mengganti a, b dengan $a' = 0,6a - 0,8b$ dan $b' = 0,8a + 0,6b$. Maka $a'^2 + b'^2 = (0,36 + 0,64)a^2 + (0,64 + 0,36)b^2 + (-0,96 + 0,96)ab = a^2 + b^2$, dan bilangan ketiga tidak berubah. $\square$

Kesimpulan. Mula-mula jumlah kuadratnya $9 + 16 + 25 = 50$, sedangkan untuk $(4, 6, 1)$ nilainya $16 + 36 + 1 = 53 \neq 50$. Jadi $(4, 6, 1)$ tidak dapat dicapai. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Perhitungan invarian harus ditunjukkan, bukan hanya disebut “rotasi”.

17.2

Jawaban. $11! - 1 = 39\,916\,799$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA $a + b + ab$ mengingatkan pada $(a + 1)(b + 1) - 1$. Tambahkan 1 pada setiap bilangan untuk mengubah operasi menjadi perkalian.

Penyelesaian.

Klaim 1. $\prod_{x \text{ di papan}} (x + 1)$ invarian.

Bukti klaim. Operasi mengganti a, b dengan $c = a + b + ab$, dan $c + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Jadi faktor $(a + 1)(b + 1)$ dalam hasil kali diganti dengan $(c + 1)$ yang bernilai sama. $\square$

Mula-mula hasil kalinya $(1 + 1)(2 + 1) \cdots (10 + 1) = 11!$. Setelah 9 langkah tersisa satu bilangan x dengan $x + 1 = 11!$.

Kesimpulan. Bilangan terakhir $11! - 1 = 39\,916\,799$, tidak bergantung pada urutan langkah. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Soal meminta nilai; tuliskan $11! - 1$ beserta alasan bahwa hasilnya tidak bergantung pada urutan.

17.3

Jawaban. Tidak dapat.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Ubin $1 \times k$ menutup satu petak dari setiap warna jika pewarnaan diagonal modulo k . Hitung banyak petak per warna.

Penyelesaian. Beri petak (i, j) , $1 \leq i, j \leq 10$, warna $w(i, j) = (i + j) \bmod 4$.

Klaim 1. Setiap ubin 1×4 menutup tepat satu petak dari setiap warna.

Bukti klaim. Ubin mendatar menutup $(i, j), \dots, (i, j + 3)$ dengan nilai $i + j$ empat bilangan berurutan, yang memiliki keempat sisa modulo 4; serupa untuk ubin tegak. $\square$

Jika 25 ubin menutup papan, setiap warna muncul tepat 25 kali.

Klaim 2. Banyak petak warna 0, 1, 2, 3 adalah 25, 24, 25, 26.

Bukti klaim. Banyak petak dengan $i + j = t$ adalah $t - 1$ untuk $2 \leq t \leq 11$ dan $21 - t$ untuk $11 \leq t \leq 20$. Menjumlahkan menurut $t \bmod 4$: warna 0 ($t = 4, 8, 12, 16, 20$): $3 + 7 + 9 + 5 + 1 = 25$; warna 1 ($t = 5, 9, 13, 17$): $4 + 8 + 8 + 4 = 24$; warna 2 ($t = 2, 6, 10, 14, 18$): $1 + 5 + 9 + 7 + 3 = 25$; warna 3 ($t = 3, 7, 11, 15, 19$): $2 + 6 + 10 + 6 + 2 = 26$. $\square$

Kesimpulan. Banyak petak per warna tidak sama, jadi penutupan mustahil. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Penghitungan per warna harus ditunjukkan; hasil 25, 24, 25, 26 adalah bukti ketidakmungkinan.

17.4

Jawaban. Tepat untuk $n \equiv 0$ atau $3 \pmod{4}$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Paritas jumlah adalah invarian untuk selisih; itu memberi syarat perlu. Untuk syarat cukup, bangun proses eksplisit dengan blok empat bilangan.

Penyelesaian. Syarat perlu.

Klaim 1. Paritas jumlah semua bilangan invarian.

Bukti klaim. $|a - b| \equiv a - b \equiv a + b \pmod{2}$. $\square$

Jika bilangan terakhir 0, jumlah awal $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ harus genap, yaitu $4 \mid n(n+1)$, yang berarti $n \equiv 0$ atau $3 \pmod{4}$.

Syarat cukup.

Klaim 2. Empat bilangan berurutan $k, k + 1, k + 2, k + 3$ dapat diubah menjadi 0.

Bukti klaim. $(k + 1) - k = 1, (k + 3) - (k + 2) = 1$, lalu $1 - 1 = 0$. $\square$

Untuk $n \equiv 0 \pmod{4}$, bagi $1, \dots, n$ menjadi blok empat bilangan berurutan, ubah setiap blok menjadi 0, lalu gabungkan nol-nol dengan $|0 - 0| = 0$. Untuk $n \equiv 3 \pmod{4}$, mula-mula $3 - 2 = 1$ dan $1 - 1 = 0$, lalu $4, \dots, n$ dibagi blok empat dan diproses seperti tadi.

Kesimpulan. Bilangan terakhir dapat bernilai 0 jika dan hanya jika $n \equiv 0$ atau $3 \pmod{4}$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Soal “untuk n berapa saja” memerlukan dua arah. Konstruksi untuk $n \equiv 3 \pmod{4}$ sering dilupakan.

17.5

Jawaban. Tidak pernah (untuk n genap).

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Setiap langkah menyentuh satu titik hitam dan satu titik putih (pada segi- n genap); selisih jumlah warna invarian.

Penyelesaian. Karena n genap, titik sudut dapat diwarnai hitam dan putih bergantian sehingga dua titik bersebelahan selalu berbeda warna; beri warna hitam pada titik yang mula-mula bernilai 1. Misalkan $D = (\text{jumlah bilangan di titik hitam}) - (\text{jumlah di titik putih})$.

Klaim 1. D invariant.

Bukti klaim. Setiap langkah menambah 1 pada dua titik bersebelahan, satu hitam dan satu putih, sehingga kedua jumlah bertambah 1. $\square$

Mula-mula $D = 1$. Jika suatu saat semua bilangan sama dengan c , maka $D = \frac{n}{2}c - \frac{n}{2}c = 0$.

Kesimpulan. Kontradiksi dengan klaim 1; keadaan itu tidak pernah tercapai. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Pewarnaan bergantian hanya mungkin untuk n genap; sebutkan.

17.6

Jawaban. Terbukti.

💡 IDEKUNCI & CARA MENEMUKANNYA Kita mencari besaran yang turun. Coba jumlah kuadrat selisih yang berjarak dua; perhitungan menunjukkan perubahan $2yS$, yang negatif.

Penyelesaian. Tulis bilangan di titik sudut sebagai $x_1, \dots, x_5$ (indeks modulo 5) dan $S = x_1 + \dots + x_5 > 0$.

Klaim 1. S invariant.

Bukti klaim. $(x + y) + (-y) + (z + y) = x + y + z$. $\square$

Klaim 2. $f = \sum_{i=1}^5 (x_i - x_{i+2})^2$ berkurang sebesar $-2yS$ pada setiap langkah.

Bukti klaim. Misalkan langkah dilakukan di $x_2 = y < 0$ dengan $x_1 = x$, $x_3 = z$, $x_4 = u$, $x_5 = v$. Suku $(x_1 - x_3)^2$ tidak berubah karena $(x + y) - (z + y) = x - z$. Keempat suku lain berubah: $(y - u)^2 \rightarrow (y + u)^2$, $(z - v)^2 \rightarrow (z + y - v)^2$, $(u - x)^2 \rightarrow (u - x - y)^2$, $(v - y)^2 \rightarrow (v + y)^2$. Jumlah perubahannya $4yu + (2y(z - v) + y^2) + (-2y(u - x) + y^2) + 4yv = 2y(x + y + z + u + v) = 2yS$. $\square$

Karena $y \leq -1$ dan $S \geq 1$ (bilangan bulat), f turun paling sedikit 2 setiap langkah.

Kesimpulan. f bilangan bulat tak negatif, jadi hanya dapat turun berhingga kali: proses berhenti. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Pada IMO 1986, menemukan monovarian yang tepat adalah seluruh soal; perhitungan perubahannya harus lengkap.

↑ PENGEMBANGAN Monovarian lain yang juga bekerja: $\sum_i \sum_j |x_i + x_{i+1} + \dots + x_j|$ atas semua ruas siklis. Coba buktikan bahwa ia turun tegas.

Bab 18 — Teori Graf

18.1

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Jabat tangan menjadi graf; lema jabat tangan memberi paritas jumlah derajat.

Penyelesaian. Buat graf dengan orang sebagai titik dan setiap jabat tangan sebagai sisi; banyak jabat tangan seseorang adalah derajatnya. Menurut lema jabat tangan, $\sum_v d(v) = 2|E|$ genap. Tulis jumlah itu sebagai jumlah derajat genap (genap) ditambah jumlah derajat ganjil. Maka jumlah derajat ganjil juga genap, dan jumlah dari t bilangan ganjil genap jika dan hanya jika t genap. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Langkah dari “jumlah derajat genap” ke “banyak derajat ganjil genap” perlu satu kalimat penjelasan.

18.2

Jawaban. Tidak ada.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Jumlah derajat harus genap.

Penyelesaian. Jika ada, jumlah derajatnya $5 \cdot 3 = 15$, padahal menurut lema jabat tangan jumlah derajat sama dengan $2|E|$, bilangan genap. Kontradiksi. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jawaban “tidak ada” harus disertai alasan.

18.3

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tiga warna, 17 titik: sarang merpati dari satu titik memberi 6 tetangga sewarna, lalu masalah turun ke dua warna dan enam titik ($R(3, 3) = 6$).

Penyelesaian. Pandang graf lengkap pada 17 titik yang sisinya diwarnai dengan tiga warna (topik). Kita cari segitiga sewarna.

Langkah 1. Ambil titik v . Ia bersisian dengan 16 sisi berwarna tiga, jadi menurut sarang merpati paling sedikit $\lceil 16/3 \rceil = 6$ sisi berwarna sama, misalnya warna 1, menuju titik-titik $w_1, \dots, w_6$.

Langkah 2. Jika dua titik w_i, w_j dihubungkan sisi warna 1, maka v, w_i, w_j membentuk segitiga warna 1.

Langkah 3. Jika tidak, keenam titik w_i dihubungkan hanya dengan warna 2 dan 3. Menurut hasil Ramsey $R(3, 3) = 6$ (Bab 18), graf lengkap 6 titik dengan dua warna memuat segitiga sewarna.

Kesimpulan. Dalam kedua kasus ada tiga ilmuwan yang saling berkorespondensi tentang topik yang sama. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kedua kasus harus ditangani: ada sisi warna pertama di antara keenam titik, atau tidak ada.

↑ PENGEMBANGAN Buktikan bahwa 17 tidak dapat diganti 16: ada pewarnaan tiga warna pada graf lengkap 16 titik tanpa segitiga sewarna (konstruksi Greenwood–Gleason, memakai medan berhingga 16 elemen).

18.4

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Prinsip ekstremal: ujung lintasan terpanjang tidak dapat memiliki tetangga lain.

Penyelesaian. Misalkan T pohon dengan $n \geq 2$ titik. Karena terhubung dan $n \geq 2$, T memiliki sisi. Ambil lintasan terpanjang $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ di T ($k \geq 1$).

Klaim 1. $\deg v_0 = 1$.

Bukti klaim. Andaikan v_0 bertetangga dengan $w \neq v_1$. Jika $w = v_i$ untuk suatu $i \geq 2$, maka $v_0 v_1 \cdots v_i v_0$ adalah siklus, bertentangan dengan definisi pohon. Jika $w \notin P$, maka $w v_0 v_1 \cdots v_k$ adalah lintasan lebih panjang, bertentangan dengan pemilihan P . $\square$

Kesimpulan. Dengan argumen sama, $\deg v_k = 1$. Karena $k \geq 1$, $v_0 \neq v_k$: ada paling sedikit dua daun. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Kedua kemungkinan tetangga (di lintasan dan di luar lintasan) harus dieliminasi.

18.5

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Induksi: sisipkan tim baru ke urutan yang sudah ada di posisi pertama yang “cocok”.

Penyelesaian. Induksi pada banyak tim n . Untuk $n = 1$ tidak ada yang perlu dibuktikan. Misalkan pernyataan benar untuk n tim, dan pandang $n + 1$ tim. Sisihkan satu tim X ; menurut hipotesis, n tim sisanya dapat diurutkan $T_1, \dots, T_n$ dengan T_i mengalahkan T_{i+1} .

Kasus 1: X mengalahkan T_1 . Urutan $X, T_1, \dots, T_n$ memenuhi.

Kasus 2: X kalah dari semua T_i . Urutan $T_1, \dots, T_n, X$ memenuhi.

Kasus 3: lainnya. T_1 mengalahkan X , dan ada i dengan X mengalahkan T_i ; ambil i terkecil, maka $i \geq 2$ dan T_{i-1} mengalahkan X . Urutan $T_1, \dots, T_{i-1}, X, T_i, \dots, T_n$ memenuhi.

Kesimpulan. Pernyataan benar untuk $n + 1$, dan menurut induksi untuk semua n . $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Ketiga kasus penyisipan harus dibahas.

18.6

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Pembagian yang memaksimumkan sisi silang tidak dapat diperbaiki dengan memindahkan satu titik, sehingga setiap titik memiliki paling sedikit setengah tetangganya di sisi lain.

Penyelesaian. Misalkan $G = (V, E)$. Untuk pembagian $V = A \cup B$ (saling lepas), misalkan $e(A, B)$ banyak sisi dengan satu ujung di A dan satu di B . Banyak pembagian berhingga, jadi pilih pembagian yang memaksimumkan $e(A, B)$.

Klaim 1. *Setiap titik v memiliki paling sedikit setengah tetangganya di bagian lain.*

Bukti klaim. Misalkan $v \in A$ memiliki α tetangga di A dan β di B . Memindahkan v ke B mengubah $e(A, B)$ sebesar $\alpha - \beta$. Karena $e(A, B)$ maksimum, $\alpha - \beta \leq 0$. $\square$

Menjumlahkan klaim 1 atas semua titik: jumlah banyak tetangga di bagian lain adalah $2e(A, B)$ (setiap sisi silang terhitung dari kedua ujungnya), dan jumlah banyak tetangga di bagian sendiri adalah $2(|E| - e(A, B))$. Jadi $2e(A, B) \geq 2(|E| - e(A, B))$, yaitu $e(A, B) \geq \frac{|E|}{2}$.

Kesimpulan. Sisi-sisi silang membentuk subgraf bipartit (dengan bagian A dan B) yang memuat paling sedikit setengah sisi G . $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Penjumlahan atas semua titik (setiap sisi dihitung dua kali) adalah langkah akhir yang wajib ditulis.

↑ PENGEMBANGAN Buktikan dengan argumen acak: jika setiap titik dimasukkan ke A atau B dengan peluang $\frac{1}{2}$, nilai harapan banyak sisi silang adalah $\frac{|E|}{2}$, sehingga ada pembagian dengan paling sedikit $\frac{|E|}{2}$ sisi silang.

Bab 19 — Penghitungan Ganda

19.1

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Faktor k di depan $\binom{n}{k}$ adalah “pilih seorang ketua di antara k anggota”.

Penyelesaian. Hitung banyak pasangan (panitia tak kosong $X \subseteq \{1, \dots, n\}$, ketua $x \in X$) dengan dua cara. Menurut ukuran panitia: panitia beranggota k ada $\binom{n}{k}$ dan masing-masing memiliki k pilihan ketua, jadi totalnya $\sum_k k \binom{n}{k}$. Menurut ketua: pilih ketua (n cara), lalu anggota lain sembarang himpunan bagian dari $n - 1$ orang sisanya (2^{n-1} cara), totalnya $n2^{n-1}$.

Kesimpulan. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Bukti aljabar dengan identitas $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ juga lengkap.

19.2

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Kuadrat $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$: pilih dari dua kelompok.

Penyelesaian. Hitung banyak cara memilih n orang dari kelompok n pria dan n wanita. Langsung: $\binom{2n}{n}$. Menurut banyak pria i : pilih i pria dan $n-i$ wanita, $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}^2$ cara (karena $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$).

Kesimpulan. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$. ■

CATATAN PENILAIAN Sebutkan kesimetrian $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

19.3

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Tukar urutan: hitung sumbangan setiap bilangan, bukan setiap himpunan.

Penyelesaian. Jumlah yang dicari adalah $\sum_{X \subseteq [n]} \sum_{x \in X} x = \sum_{x=1}^n x \cdot N(x)$, dengan $N(x)$ banyak himpunan bagian yang memuat x (tukar urutan penjumlahan). Himpunan bagian yang memuat x ditentukan oleh pilihan bebas atas $n-1$ unsur lain, jadi $N(x) = 2^{n-1}$.

Kesimpulan. Jumlahnya $2^{n-1}(1+2+\dots+n) = 2^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)2^{n-2}$. ■

CATATAN PENILAIAN Hitung $N(x) = 2^{n-1}$ dengan alasan.

19.4

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA $w_i^2 - l_i^2$ terfaktor, dan $w_i + l_i$ konstan.

Penyelesaian. Setiap tim bertanding melawan $n-1$ tim lain tanpa seri, jadi $w_i + l_i = n-1$. Setiap pertandingan menghasilkan tepat satu kemenangan dan satu kekalahan, jadi $\sum w_i = \sum l_i = \binom{n}{2}$. Maka

$$\sum_i (w_i^2 - l_i^2) = \sum_i (w_i - l_i)(w_i + l_i) = (n-1) \left(\sum_i w_i - \sum_i l_i \right) = 0. \quad \blacksquare$$

CATATAN PENILAIAN Dua fakta ($w_i + l_i = n-1$ dan $\sum w_i = \sum l_i$) harus disebut.

19.5

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Hitung pasangan unsur yang termuat dalam himpunan; setiap himpunan menyumbang 3, setiap pasangan paling banyak 1.

Penyelesaian. Hitung N , banyak pasangan $(\{x, y\}, A_i)$ dengan $\{x, y\} \subseteq A_i$. Menurut A_i : setiap A_i beranggota 3 memuat $\binom{3}{2} = 3$ pasangan, jadi $N = 3m$. Menurut pasangan: jika $\{x, y\} \subseteq A_i \cap A_j$ dengan $i \neq j$, maka $|A_i \cap A_j| \geq 2$, bertentangan dengan syarat; jadi setiap pasangan termuat di paling banyak satu A_i , dan $N \leq \binom{n}{2}$.

Kesimpulan. $3m \leq \frac{n(n-1)}{2}$, yaitu $m \leq \frac{n(n-1)}{6}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Alasan “paling banyak satu” berasal dari syarat irisan; tuliskan.

19.6

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** $\sum k p_n(k)$ adalah jumlah titik tetap atas semua permutasi; hitung per titik.

Penyelesaian. Hitung N , banyak pasangan (σ, i) dengan σ permutasi $\{1, \dots, n\}$ dan $\sigma(i) = i$. Menurut σ : permutasi dengan tepat k titik tetap menyumbang k pasangan, dan ada $p_n(k)$ permutasi seperti itu, jadi $N = \sum_k k p_n(k)$. Menurut i : permutasi yang menetapkan i sesuai dengan permutasi $n - 1$ unsur lainnya, jadi ada $(n - 1)!$; dengan n pilihan i , $N = n \cdot (n - 1)! = n!$.

Kesimpulan. $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$. (Artinya, rata-rata banyak titik tetap permutasi acak adalah 1.) ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pada IMO 1987, bukti penghitungan ganda seperti ini bernilai penuh jika kedua cara penghitungan ditulis jelas.

↑ **PENGEMBANGAN** Buktikan juga $\sum_k k(k - 1) p_n(k) = n!$ untuk $n \geq 2$, lalu simpulkan bahwa variansi banyak titik tetap permutasi acak adalah 1.

Bab 20 — Permainan dan Strategi

20.1

Jawaban. Ambil 4 batu; posisi P adalah kelipatan 6.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Hitung posisi P dari kecil: 0 adalah P; 1–5 adalah N; 6 adalah P. Polanya berulang dengan periode 6.

Penyelesaian.

Klaim 1. Posisi dengan n batu adalah posisi P jika dan hanya jika $6 \mid n$.

Bukti klaim. Induksi kuat pada n . $n = 0$: pemain yang harus melangkah tidak dapat melangkah (batu terakhir sudah diambil lawan), jadi P. Jika $6 \mid n$ dan $n > 0$, setiap langkah mengambil 1 sampai 5 batu menuju posisi bukan kelipatan 6, yang menurut hipotesis adalah posisi N. Jika $6 \nmid n$, mengambil $n \bmod 6 \in \{1, \dots, 5\}$ batu menuju kelipatan 6, posisi P. □

Kesimpulan. $2026 = 6 \cdot 337 + 4$ bukan kelipatan 6; pemain pertama menang dengan mengambil 4 batu, lalu selalu menjawab langkah lawan t dengan $6 - t$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Strategi harus eksplisit (“ambil $6 - t$ ”), bukan hanya “pemain pertama menang”.

20.2

Jawaban. Posisi P tepat kelipatan 3.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Hitung posisi 0 sampai 6 dan amati polanya; sisa langkah modulo 3 menjelaskannya.

Penyelesaian.

Klaim 1. Dari kelipatan 3, setiap langkah menuju bukan kelipatan 3.

Bukti klaim. Langkah 1, 2, 4 bersisa 1, 2, 1 modulo 3, tidak pernah 0. □

Klaim 2. Dari bukan kelipatan 3, ada langkah menuju kelipatan 3.

Bukti klaim. Jika $n \equiv 1$, ambil 1; jika $n \equiv 2$, ambil 2 (keduanya mungkin karena $n \geq 1$ atau $n \geq 2$). □

Kesimpulan. Dengan induksi kuat dan posisi 0 sebagai P, klaim 1 dan 2 menunjukkan posisi P adalah kelipatan 3. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Induksi dengan dua klaim (P ke N dan N ke P) wajib.

20.3

Jawaban. Pemain pertama menang, misalnya dengan mengambil 1 batu dari tumpukan 3.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Nim diselesaikan dengan XOR. Langkah menang membuat XOR nol.

Penyelesaian. Dalam biner: $3 = 011_2$, $5 = 101_2$, $7 = 111_2$. XOR-nya $011 \oplus 101 = 110$ dan $110 \oplus 111 = 001$. Menurut teorema Bouton, posisi dengan XOR tak nol adalah posisi N, jadi pemain pertama menang. Langkah menang harus membuat XOR menjadi 0: ganti tumpukan h dengan $h \oplus 1$ bila $h \oplus 1 < h$. Tumpukan $3 \rightarrow 2$, $5 \rightarrow 4$, atau $7 \rightarrow 6$.

Pemeriksaan. $2 \oplus 5 \oplus 7 = 010 \oplus 101 \oplus 111 = 000$. ■

✓ CATATAN PENILAIAN Pemeriksaan XOR setelah langkah adalah bagian dari jawaban yang meyakinkan.

20.4

Jawaban. Pemain kedua menang (untuk $n \geq 2$; untuk $n = 1$ pemain pertama tidak dapat melangkah dan kalah).

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Geser ke kiri atau ke bawah secara bebas: Nim dua tumpukan. Strategi meniru (simetri) terhadap diagonal.

Penyelesaian. Nyatakan posisi benteng dengan (x, y) , yaitu banyak petak di kiri dan di bawahnya; mula-mula $(n-1, n-1)$. Satu langkah mengurangi tepat satu koordinat dengan bilangan positif sembarang, dan permainan berakhir di $(0, 0)$. Ini adalah Nim dengan dua tumpukan x dan y .

Klaim 1. Posisi dengan $x = y$ adalah posisi P.

Bukti klaim. Dari $x = y > 0$ setiap langkah menghasilkan $x \neq y$. Dari $x \neq y$, pemain dapat mengurangi koordinat yang lebih besar sehingga keduanya sama. Posisi $(0, 0)$ memiliki $x = y$. □

Kesimpulan. Posisi awal $(n-1, n-1)$ adalah P, jadi pemain kedua menang dengan selalu mengembalikan benteng ke diagonal. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kasus $n = 1$ perlu disebut.

20.5

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pencurian strategi: tanda tambahan tidak pernah merugikan dalam silang-lingkaran.

Penyelesaian. Andaikan pemain kedua memiliki strategi menang $\mathcal{S}$. Pemain pertama memakai strategi berikut: letakkan tanda di petak sembarang (tanda “ekstra”), lalu berpura-pura menjadi pemain kedua dan ikuti $\mathcal{S}$ sambil mengabaikan tanda ekstra. Jika $\mathcal{S}$ meminta petak yang sudah berisi tanda ekstra, letakkan tanda di petak kosong lain, yang menjadi tanda ekstra baru.

Klaim 1. Strategi ini sah dan menang.

Bukti klaim. Pemain pertama selalu dapat melangkah (jika papan penuh, permainan sudah berakhir). Tanda tambahan tidak pernah merugikan dalam silang-lingkaran: setiap baris yang diselesaikan menurut $\mathcal{S}$ tetap selesai, dan lawan tidak memperoleh apa pun dari tanda ekstra kita. Karena $\mathcal{S}$ menang untuk pemain kedua, pemain pertama menyelesaikan satu baris sebelum lawan. □

■
Kesimpulan. Kedua pemain tidak mungkin sama-sama memiliki strategi menang, kontradiksi.

✓ **CATATAN PENILAIAN** Alasan “tanda ekstra tidak merugikan” adalah inti argumen dan harus dijelaskan.

20.6

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Langkah “hapus 1” tidak mengubah apa pun selain 1, dan 1 adalah pembagi semua bilangan. Maka langkah itu dapat “diserap” ke dalam langkah lain.

Penyelesaian. Setiap langkah mengurangi banyak bilangan di papan, jadi permainan berakhir dalam berhingga langkah dan tidak ada seri. Menurut teorema Zermelo, salah satu pemain memiliki strategi menang. Andaikan pemain kedua memilikinya.

Langkah 1. Pemain pertama memilih bilangan 1; hanya 1 yang terhapus (pembagi 1 hanya 1). Karena $n \geq 2$, papan tidak kosong.

Langkah 2. Menurut strategi menang pemain kedua, ada jawaban X yang membawa ke posisi $\mathcal{P}$ di mana pemain kedua menang. Posisi $\mathcal{P}$ adalah $\{1, \dots, n\}$ dikurangi 1, X , dan semua pembagi X .

Langkah 3. Karena 1 membagi X , posisi $\mathcal{P}$ sama dengan posisi setelah memilih X sejak langkah pertama. Maka pemain pertama dapat memilih X di langkah pertama dan kemudian memainkan strategi menang pemain kedua dari $\mathcal{P}$.

Kesimpulan. Pemain pertama memiliki strategi menang, bertentangan dengan pengandaian.

✓ **CATATAN PENILAIAN** Sebutkan bahwa permainan berhingga tanpa seri, sehingga salah satu pemain memiliki strategi menang (Zermelo).

↑ **PENGEMBANGAN** Argumen ini hanya membuktikan keberadaan strategi. Untuk $n \leq 10$, cari strategi pemain pertama secara eksplisit (misalnya dengan komputer atau analisis posisi P).

Bab 21 — Sepuluh Teknik Pembuktian

21.1

Jawaban. Kedua bilangan irasional.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Irasionalitas akar: kontradiksi dengan pecahan dalam bentuk paling sederhana. Untuk jumlah akar, kuadratkan untuk mereduksi ke akar tunggal.

Penyelesaian.

Klaim 1. $\sqrt{3}$ irasional.

Bukti klaim. Andaikan $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ dengan p, q bilangan asli dan $\text{FPB}(p, q) = 1$. Maka $p^2 = 3q^2$, jadi $3 \mid p^2$ dan menurut Soal F1.5 $3 \mid p$. Tulis $p = 3p_1$: $9p_1^2 = 3q^2$, yaitu $q^2 = 3p_1^2$, sehingga $3 \mid q$. Maka $3 \mid \text{FPB}(p, q)$, kontradiksi. □

Klaim 2. $\sqrt{6}$ irasional.

Bukti klaim. Andaikan $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$. Maka $p^2 = 6q^2$ genap, jadi $p = 2p_1$ dan $2p_1^2 = 3q^2$. Ruas kiri genap, jadi q genap. Kontradiksi. □

Andaikan $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ rasional. Kuadratkan: $5 + 2\sqrt{6} = r^2$, jadi $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ rasional, bertentangan dengan klaim 2.

Kesimpulan. $\sqrt{3}$ dan $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irasional. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Lema “ $3 \mid p^2 \Rightarrow 3 \mid p$ ” harus dirujuk atau dibuktikan.

21.2

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Langkah induksi: jabarkan dan kumpulkan kelipatan 3.

Penyelesaian. Misalkan $P(n)$: $3 \mid n^3 + 2n$.

Langkah 1. $P(1)$: $1 + 2 = 3$.

Langkah 2. Jika $P(n)$, maka $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$, jumlah dua kelipatan 3.

Kesimpulan. Menurut induksi, $P(n)$ untuk semua n . ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Basis dan langkah harus tertulis.

21.3

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Kalikan hipotesis dengan $1 + x$; syarat $x > -1$ membuat faktor ini positif.

Penyelesaian. Tetapkan $x > -1$ dan misalkan $P(n)$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Langkah 1. $P(1)$: kesamaan.

Langkah 2. Misalkan $P(n)$. Karena $1 + x > 0$, mengalikan kedua ruas $P(n)$ dengan $1 + x$ mempertahankan arah ketaksamaan: $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, karena $nx^2 \geq 0$.

Kesimpulan. Menurut induksi, ketaksamaan Bernoulli berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Syarat $1 + x > 0$ harus disebut; tanpa itu arah ketaksamaan bisa berbalik.

21.4

Jawaban. Salah; $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ habis dibagi 641.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Untuk pernyataan “untuk semua”, satu contoh penyangkal cukup. Kuncinya adalah membuktikan pembagian dengan 641 tanpa kalkulator.

Penyelesaian. Untuk $n = 0, 1, 2, 3, 4$ diperoleh 3, 5, 17, 257, 65537, semuanya prima. Namun untuk $n = 5$:

Klaim 1. $641 \mid 2^{32} + 1$.

Bukti klaim. Perhatikan $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$ dan $641 = 5^4 + 2^4$. Dari yang pertama, $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$, jadi (pangkat empat) $5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1$. Dari yang kedua, $5^4 \equiv -2^4$, sehingga $-2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1$, yaitu $2^{32} \equiv -1 \pmod{641}$. □

Karena $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 > 641$, bilangan itu komposit: $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$.

Kesimpulan. Pernyataan salah; satu contoh penyangkal cukup. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Bukti keterbagian dengan dua representasi 641 adalah bagian yang bernilai; menyebut hasil tanpa bukti kurang meyakinkan.

21.5

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Algoritma serakah: ambil bilangan Fibonacci terbesar yang tidak melebihi n . Sisa lebih kecil dari bilangan Fibonacci sebelumnya, sehingga indeks tidak berurutan.

Penyelesaian. Kita pakai bilangan Fibonacci $G_1 = 1, G_2 = 2, G_{k+1} = G_k + G_{k-1}$ (yaitu 1, 2, 3, 5, 8, ...) agar tidak ada dua bilangan 1. Misalkan $P(n)$: n adalah jumlah beberapa G_i berbeda yang indeksnya tidak berurutan. Induksi kuat pada $n \geq 1$.

Kasus 1: $n = G_k$ untuk suatu k . Selesai (satu suku).

Kasus 2: n bukan bilangan Fibonacci. Maka $n \geq 4$; ambil k dengan $G_k < n < G_{k+1}$ ($k \geq 3$), dan $m = n - G_k$. Maka $0 < m < G_{k+1} - G_k = G_{k-1}$. Menurut hipotesis induksi kuat ($m < n$), $m = G_{i_1} + \dots + G_{i_r}$ dengan indeks berbeda dan tidak berurutan; karena setiap suku $\leq m < G_{k-1}$, semua indeks $\leq k-2$. Maka $n = G_k + G_{i_1} + \dots + G_{i_r}$ dengan k berbeda dari dan tidak berurutan dengan semua i_j .

Kesimpulan. $P(n)$ benar untuk semua n . ■

CATATAN PENILAIAN Pemakaian 1, 2, 3, 5, ... (bukan 1, 1, 2, ...) harus dijelaskan agar “berbeda” bermakna.

21.6

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Prinsip ekstremal pada jarak titik ke garis. Titik kaki tegak lurus membagi garis menjadi dua sisi; sarang merpati menempatkan dua dari tiga titik di sisi yang sama.

Penyelesaian. Misalkan S himpunan titik yang dimaksud. Sebut garis *garis-S* jika memuat paling sedikit dua titik S . Pandang himpunan $\mathcal{F}$ semua pasangan (P, ℓ) dengan ℓ garis-S dan $P \in S$ tidak pada ℓ .

Langkah 1. $\mathcal{F}$ tak kosong (karena tidak semua titik segaris) dan berhingga. Pilih $(P, \ell) \in \mathcal{F}$ dengan jarak $d(P, \ell)$ minimum.

Klaim 1. ℓ memuat tepat dua titik S .

Bukti klaim. Andaikan ℓ memuat paling sedikit tiga titik S . Misalkan Q kaki tegak lurus dari P ke ℓ . Titik Q membagi ℓ menjadi dua sinar (keduanya memuat Q), jadi menurut sarang merpati dua dari ketiga titik, sebut B dan C , terletak pada sinar yang sama dengan $QB < QC$ (B boleh sama dengan Q). Pandang garis-S $m = PC$ dan titik B . Karena $m \neq \ell$ (sebab $P \notin \ell$) dan $B \neq C$, $B \notin m$, jadi $(B, m) \in \mathcal{F}$. Karena B terletak pada ruas QC , $d(B, m) = \frac{BC}{QC} d(Q, m) \leq d(Q, m)$. Pada segitiga siku-siku PQC , $d(Q, m)$ adalah tinggi ke sisi miring PC , yang lebih pendek dari kaki PQ : $d(Q, m) < PQ = d(P, \ell)$. Jadi $d(B, m) < d(P, \ell)$, bertentangan dengan minimalitas. □

Kesimpulan. Garis ℓ melalui tepat dua titik S . ■

CATATAN PENILAIAN Pembuktian $d(B, PC) < d(P, \ell)$ harus lengkap, termasuk kasus $B = Q$.

↑ **PENGEMBANGAN** Hasil yang lebih kuat (Kelly–Moser): ada paling sedikit $\frac{3n}{7}$ garis yang melalui tepat dua titik. Akibat menarik dari Sylvester–Gallai: bidang Fano (tujuh titik dan tujuh garis, setiap garis memuat tepat tiga titik) tidak dapat digambar dengan titik dan garis lurus di bidang real. Jelaskan mengapa.

Bab 44 — Problem Set Intensif

44.1

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Deret $\sum \frac{1}{k^2}$ tidak teleskopik, tetapi dapat dibandingkan dengan deret teleskopik $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ yang sedikit lebih besar.

Penyelesaian.

Klaim 1. $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ untuk $k \geq 2$.

Bukti klaim. Ruas kanan $\frac{1}{k(k-1)}$, dan $k(k-1) < k^2$. □

Untuk $n = 1$ jumlahnya $1 < 2$. Untuk $n \geq 2$, menjumlahkan klaim 1 untuk $k = 2, \dots, n$ dan menambahkan suku $k = 1$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Suku $k = 1$ harus dipisahkan karena $\frac{1}{k(k-1)}$ tidak terdefinisi di $k = 1$.

44.2

Jawaban. $f(x) = x + c$ untuk sembarang konstanta c .

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Satu substitusi ($x = 0$) sudah mengunci bentuk f .

Penyelesaian. Substitusi $x = 0$: $f(y) = f(0) + y$ untuk semua y . Jadi setiap solusi berbentuk $f(x) = x + c$ dengan $c = f(0)$.

Pemeriksaan. $f(x + y) = x + y + c = (x + c) + y = f(x) + y$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pemeriksaan bahwa semua $f(x) = x + c$ memenuhi tetap wajib.

44.3

Jawaban. Terbukti, dengan kesamaan di $a = b = c$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Ruas kanan memuat $\sqrt[3]{abc}$, tanda AM–GM tiga suku. Pilih bobot 2 : 1 agar hasil kali di bawah akar menjadi $\frac{a^3}{abc}$.

Penyelesaian. Misalkan $g = \sqrt[3]{abc}$.

Klaim 1. $2\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{3a}{g}$.

Bukti klaim. AM-GM tiga suku: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = \frac{3a}{g}$. □

Serupa, $2\frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3b}{g}$ dan $2\frac{c}{a} + \frac{a}{b} \geq \frac{3c}{g}$. Menjumlahkan ketiganya: setiap pecahan $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ muncul tepat tiga kali, jadi $3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{3(a+b+c)}{g}$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Tunjukkan ketiga ketaksamaan siklis dan penjumlahannya; setiap pecahan harus muncul tepat tiga kali.

44.4

Jawaban. $P(x) = x$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Persamaan $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ membawa titik tetap ke titik tetap. Mulai dari 0 dan iterasikan untuk memperoleh tak hingga titik tetap.

Penyelesaian. Definisikan $x_0 = 0$ dan $x_{k+1} = x_k^2 + 1$: 0, 1, 2, 5, 26, ...

Klaim 1. $P(x_k) = x_k$ untuk semua k .

Bukti klaim. Induksi: $P(x_0) = P(0) = 0$. Jika $P(x_k) = x_k$, maka $P(x_{k+1}) = P(x_k^2 + 1) = P(x_k)^2 + 1 = x_k^2 + 1 = x_{k+1}$. □

Klaim 2. Barisan (x_k) naik tegas.

Bukti klaim. $x_{k+1} - x_k = x_k^2 - x_k + 1 = \left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. □

Maka polinomial $P(x) - x$ memiliki tak hingga banyak akar berbeda, sehingga identik nol.

Kesimpulan. $P(x) = x$, dan memang $x^2 + 1 = x^2 + 1$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Barisan harus terbukti naik tegas (titik-titiknya berbeda); tanpa itu “tak hingga banyak akar” belum terbukti.

44.5

Jawaban. Terbukti, dengan kesamaan di $a = b = c = 1$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Kesamaan di $a = b = c = 1$. Ruas kanan $(a + b + c)^2$ mengisyaratkan Cauchy-Schwarz; kita pisahkan a dari $b + c$ dan cari batas bawah $(b^2 + 2)(c^2 + 2)$ dalam $(b + c)^2$.

Penyelesaian.

Klaim 1. $(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3\left(1 + \frac{(b+c)^2}{2}\right)$.

Bukti klaim. Jabarkan selisihnya:

$$b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4 - 3\left(b^2 + 2bc + c^2\right) = b^2c^2 - 2bc + 1 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + c^2) = (bc - 1)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 \geq 0.$$

□

Klaim 2. $(a^2 + 2)\left(1 + \frac{(b+c)^2}{2}\right) \geq (a + b + c)^2$.

Bukti klaim. Cauchy–Schwarz untuk vektor $(a, \sqrt{2})$ dan $(1, \frac{b+c}{\sqrt{2}})$: $(a^2 + 2)(1 + \frac{(b+c)^2}{2}) \geq (a \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{b+c}{\sqrt{2}})^2 = (a + b + c)^2$. $\square$

Kesimpulan. Mengalikan klaim 1 dengan $a^2 + 2 > 0$ dan memakai klaim 2: $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a^2 + 2)(1 + \frac{(b+c)^2}{2}) \geq 3(a + b + c)^2$. $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Ekspresi SOS $(bc - 1)^2 + \frac{(b-c)^2}{2}$ adalah bukti lemma yang paling meyakinkan bagi penilai.

↑ **PENGEMBANGAN** Rumusan asli APMO 2004 adalah $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$. Simpulkan dari hasil di atas dengan $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

44.6

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Suku negatif dapat muncul, jadi AM-GM langsung sulit. Ide IMO 2005: bandingkan penyebut $x^5 + y^2 + z^2$ dengan $x^3(x^2 + y^2 + z^2)$, yang sama jika $x = 1$. Setelah itu penyebut semua suku seragam.

Penyelesaian. Misalkan $Q = x^2 + y^2 + z^2$.

Klaim 1. $\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^3 Q}$.

Bukti klaim. Selisih ruas kiri dan kanan sama dengan

$$(x^5 - x^2) \cdot \frac{x^3 Q - x^5 - y^2 - z^2}{(x^5 + y^2 + z^2) x^3 Q} = \frac{(x^5 - x^2)(x^3 - 1)(y^2 + z^2)}{(x^5 + y^2 + z^2) x^3 Q} = \frac{x^2(x^3 - 1)^2(y^2 + z^2)}{(x^5 + y^2 + z^2) x^3 Q} \geq 0,$$

karena $x^3 Q - x^5 = x^3(y^2 + z^2)$. $\square$

Ruas kanan klaim 1 sama dengan $\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{Q}$. Dari $xyz \geq 1$, $\frac{1}{x} \leq yz$, jadi ruas kanan $\geq \frac{x^2 - yz}{Q}$. Menjumlahkan secara siklis:

$$\sum_{\text{siklis}} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)}{Q} \geq 0,$$

dengan langkah terakhir memakai $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (Contoh 1.1). $\blacksquare$

✓ **CATATAN PENILAIAN** Pada IMO 2005, salah satu peserta mendapat hadiah khusus untuk solusi satu baris berdasarkan ide ini. Bukti klaim (faktor $(x^3 - 1)^2$) harus lengkap.

↑ **PENGEMBANGAN** Periksa bahwa syarat $xyz \geq 1$ hanya dipakai sekali, pada langkah $\frac{1}{x} \leq yz$. Apa yang terjadi jika syaratnya diganti $xyz \leq 1$?

44.7

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Pisahkan $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ dan pakai Fermat dalam bentuk $n^p \equiv n$ untuk setiap prima.

Penyelesaian. Menurut teorema Fermat dalam bentuk $n^p \equiv n \pmod{p}$ untuk setiap bilangan bulat n dan prima p : modulo 5: $n^5 \equiv n$. Modulo 3: $n^3 \equiv n$, jadi $n^5 = n^3 \cdot n^2 \equiv n \cdot n^2 = n^3 \equiv n$. Modulo 2: $n^2 \equiv n$, jadi $n^5 \equiv n$. Maka 2, 3, 5 membagi $n^5 - n$, dan karena ketiganya relatif prima sepasang-sepasang, $30 \mid n^5 - n$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Bentuk $n^p \equiv n$ berlaku untuk semua n , termasuk kelipatan p ; sebutkan.

44.8

Jawaban. Semua n ganjil.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** $2 \equiv -1 \pmod{3}$.

Penyelesaian. $2 \equiv -1 \pmod{3}$, jadi $2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{3}$. Jika n ganjil nilainya 0; jika n genap nilainya 2. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Jawaban harus menyebut semua n ganjil, dengan alasan.

44.9

Jawaban. $p = 3$.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Banyak pembagi 6 berarti bentuk q^5 atau q^2r . Untuk $p \geq 5$, faktor 4 dan 3 dipaksa, lalu hitung τ .

Penyelesaian.

Kasus 1: $p = 2$. $15 = 3 \cdot 5$, $\tau = 4$.

Kasus 2: $p = 3$. $20 = 2^2 \cdot 5$, $\tau = 3 \cdot 2 = 6$. Memenuhi.

Kasus 3: $p \geq 5$.

Klaim 1. $v_2(p^2 + 11) = 2$ dan $3 \mid p^2 + 11$.

Bukti klaim. p ganjil, jadi $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$ dan $p^2 + 11 \equiv 12 \equiv 4 \pmod{8}$. $3 \nmid p$, jadi $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ dan $p^2 + 11 \equiv 0 \pmod{3}$. □

Tulis $p^2 + 11 = 12m$ dengan m ganjil dan $m \geq \frac{36}{12} = 3$. Jika m memiliki faktor prima $r \neq 3$, maka $2^2 \cdot 3 \cdot r \mid p^2 + 11$ dengan tiga prima berbeda, sehingga $\tau \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Jika $m = 3^j$ ($j \geq 1$), maka $p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3^{j+1}$ dan $\tau = 3(j+2) \geq 9$. Dalam kedua subkasus $\tau > 6$.

Kesimpulan. Hanya $p = 3$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Periksa $p = 2$ dan $p = 3$ secara eksplisit.

44.10

Jawaban. Terbukti.

💡 **IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA** Identitas perkalian bilangan Fermat membuat setiap F_n berselisih 2 dari kelipatan setiap F_m sebelumnya.

Penyelesaian.

Klaim 1. $F_0 F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2$ untuk $n \geq 1$.

Bukti klaim. Induksi. $n = 1$: $F_0 = 3 = 5 - 2$. Jika benar untuk n , maka $F_0 \cdots F_n = (F_n - 2)F_n = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$. $\square$

Misalkan $m < n$ dan d pembagi persekutuan F_m dan F_n . Karena F_m adalah salah satu faktor di klaim 1, $d \mid F_0 \cdots F_{n-1} = F_n - 2$. Maka $d \mid F_n - (F_n - 2) = 2$. Karena F_n ganjil, $d = 1$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Induksi untuk identitas perkalian harus ditulis.

44.11

Jawaban. Tidak ada.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Untuk n besar, $n! + 5$ habis dibagi 5 tetapi tidak 25. Sisanya diperiksa manual.

Penyelesaian.

Kasus 1: $n \geq 10$. $25 \mid n!$ (faktor 5 dan 10), jadi $n! + 5 \equiv 5 \pmod{25}$. Bilangan itu habis dibagi 5 tetapi tidak oleh 25. Kuadrat yang habis dibagi 5 selalu habis dibagi 25 (jika $5 \mid k^2$ maka $5 \mid k$). Jadi bukan kuadrat.

Kasus 2: $1 \leq n \leq 9$. Nilainya 6, 7, 11, 29, 125, 725, 5045, 40325, 362885. Tidak ada yang kuadrat: $2^2 < 6, 7 < 3^2; 3^2 < 11 < 4^2; 5^2 < 29 < 6^2; 11^2 < 125 < 12^2; 26^2 = 676 < 725 < 729 = 27^2; 71^2 = 5041 < 5045 < 72^2; 200^2 < 40325 < 201^2 = 40401; 602^2 = 362404 < 362885 < 603^2$.

Kesimpulan. Tidak ada n yang memenuhi. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Kasus $n \leq 9$ harus diperiksa satu per satu dengan menjepit di antara kuadrat berurutan.

44.12

Jawaban. $(a, b) = (2t, 1), (t, 2t), (8t^4 - t, 2t)$ untuk bilangan asli t .

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Persamaan kuadrat dalam a dengan parameter: Vieta memberi akar kedua. Akar yang lebih kecil ternyata harus tepat $\frac{b}{2}$, dan dari situ semua solusi terbaca.

Penyelesaian. Misalkan $k = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} \in \mathbb{N}$; penyebutnya positif. Persamaan setara dengan

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0. \quad (*)$$

Kasus 1: $b = 1$. $k = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$, jadi a genap. Sebaliknya setiap $a = 2t$ memberi $k = t$. Solusi: $(2t, 1)$.

Kasus 2: $b \geq 2$. Pandang (*) sebagai persamaan kuadrat dalam a dengan akar a dan (Vieta) $a' = 2kb^2 - a = \frac{k(b^3 - 1)}{a}$. Bentuk pertama menunjukkan a' bulat, bentuk kedua menunjukkan $a' > 0$. Misalkan $a_1 \geq a_2$ kedua akar ini; keduanya memenuhi $a_i^2 = k(2a_i b^2 - b^3 + 1)$.

Klaim 1. $a_2 < b$.

Bukti klaim. $a_1 + a_2 = 2kb^2$, jadi $a_1 \geq kb^2$, dan $a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{b^3 - 1}{b^2} < b$. $\square$

Klaim 2. $2a_2 \geq b$.

Bukti klaim. Karena $k \geq 1$ dan $a_2^2 > 0$, $2a_2b^2 - b^3 + 1 = \frac{a_2^2}{k} > 0$, jadi bilangan bulat $b^2(2a_2 - b) + 1 \geq 1$, yaitu $2a_2 \geq b$. $\square$

Klaim 3. $2a_2 = b$.

Bukti klaim. Jika $2a_2 > b$, penyebutnya $b^2(2a_2 - b) + 1 \geq b^2 + 1 > a_2^2$ (klaim 1), sehingga $k = \frac{a_2^2}{b^2(2a_2 - b) + 1} < 1$, mustahil. $\square$

Jadi $b = 2t$, $a_2 = t$, penyebutnya 1, $k = t^2$, dan $a_1 = 2kb^2 - a_2 = 8t^4 - t$. Karena a adalah salah satu akar, $a \in \{t, 8t^4 - t\}$.

Pemeriksaan. Untuk $(t, 2t)$: penyebut $2t \cdot 4t^2 - 8t^3 + 1 = 1$, $k = t^2$. Untuk $(8t^4 - t, 2t)$: (*) dipenuhi karena $8t^4 - t$ adalah akar lain. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Pada IMO 2003, kehilangan keluarga $(8t^4 - t, 2t)$ atau $(2t, 1)$ adalah kesalahan paling umum. Ketiga keluarga harus ditemukan dan diperiksa.

↑ PENGEMBANGAN Tentukan semua bilangan asli a, b sehingga $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ bulat dan sama dengan 4; bandingkan dengan IMO 1988 (Bab 8).

44.13

Jawaban. $\frac{5}{8}$.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Simetri: pusat pada sumbu AB . Koordinat mengubah syarat menyinggung dan melalui menjadi dua persamaan.

Penyelesaian. Pasang koordinat $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$. Pusat lingkaran berjarak sama ke A dan B , jadi terletak pada sumbu AB : $O(\frac{1}{2}, y)$. Lingkaran menyinggung garis CD ($y = 1$), dan pusat berada di bawah garis itu (lingkaran melalui A dan B), jadi $r = 1 - y$. Lingkaran melalui A : $r^2 = \frac{1}{4} + y^2$. Maka $1 - 2y + y^2 = \frac{1}{4} + y^2$, $y = \frac{3}{8}$, dan $r = \frac{5}{8}$. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Tentukan posisi pusat (di bawah CD) untuk memilih tanda $r = 1 - y$.

44.14

Jawaban. Terbukti; jumlahnya sama dengan tinggi segitiga.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Luas segitiga dibagi tiga dengan puncak di P .

Penyelesaian. Misalkan sisi segitiga s , tinggi h , dan P di dalamnya berjarak d_1, d_2, d_3 ke ketiga sisi. Hubungkan P ke ketiga titik sudut; segitiga terbagi menjadi tiga segitiga dengan alas s dan tinggi d_i . Menjumlahkan luas: $\frac{1}{2}sh = \frac{1}{2}sd_1 + \frac{1}{2}sd_2 + \frac{1}{2}sd_3$.

Kesimpulan. $d_1 + d_2 + d_3 = h$, tidak bergantung pada P . $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Bukti luas sudah lengkap; tidak perlu koordinat.

44.15

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Titik tengah BC adalah kaki garis tinggi; ubah semua ke dalam AM , BM , dan MD .

Penyelesaian. Misalkan M titik tengah BC ; pada segitiga sama kaki $AM \perp BC$. Tulis $BM = MC = m$ dan misalkan (tanpa mengurangi keumuman, karena simetri terhadap AM) D terletak pada ruas MC dengan $MD = x$. Maka $BD = m + x$ dan $DC = m - x$, sehingga $BD \cdot DC = m^2 - x^2$. Pythagoras pada segitiga AMD : $AD^2 = AM^2 + x^2$.

Kesimpulan. $AD^2 + BD \cdot DC = AM^2 + m^2 = AB^2$ (Pythagoras pada segitiga AMB). ■

CATATAN PENILAIAN Asumsi D di antara M dan C dibenarkan oleh simetri; sebutkan.

44.16

Jawaban. Terbukti (teorema Brahmagupta).

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Kejar sudut di segitiga siku-siku BPC dengan garis tingginya, lalu pindahkan sudut melalui sudut bertolak belakang dan sudut keliling ke segitiga APD .

Penyelesaian. Misalkan garis melalui P yang tegak lurus BC memotong BC di H dan memotong AD di M . Titik A, P, C segaris dan B, P, D segaris, dengan P di antaranya.

Klaim 1. $\angle BPH = \angle ACB$ dan $\angle HPC = \angle DBC$.

Bukti klaim. Segitiga BPC siku-siku di P dan PH garis tingginya, jadi $\angle BPH = 90^\circ - \angle PBH = \angle PCB = \angle ACB$, dan $\angle HPC = 90^\circ - \angle PCH = \angle PBC = \angle DBC$. □

Klaim 2. $MP = MD$.

Bukti klaim. Sinar PM berlawanan dengan PH dan sinar PD berlawanan dengan PB , jadi $\angle MPD = \angle HPB = \angle ACB$ (bertolak belakang). Karena $ABCD$ talibusur, $\angle ACB = \angle ADB$ (menghadap busur AB), jadi $\angle MPD = \angle MDP$ dan segitiga MPD sama kaki. □

Klaim 3. $MP = MA$.

Bukti klaim. Serupa, $\angle MPA = \angle HPC = \angle DBC = \angle DAC = \angle MAP$ (busur CD). □

Kesimpulan. $MA = MP = MD$ dan M pada AD , jadi M titik tengah AD . ■

CATATAN PENILAIAN Kedua kesamaan sudut ($MP = MD$ dan $MP = MA$) harus dibuktikan terpisah.

44.17

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Titik diametral titik singgung dan titik singgung lingkaran singgung luar dihubungkan oleh homoteti di A . Setelah itu, garis tengah pada dua segitiga menyelesaikan.

Penyelesaian. Misalkan M_a titik tengah BC , D' titik diametral D pada lingkaran dalam ω , dan E titik singgung lingkaran singgung luar ω_A pada BC .

Klaim 1. A, D', E segaris.

Bukti klaim. Garis singgung ω di D' sejajar BC (tegak lurus DD'). Homoteti berpusat A yang memetakan ω ke ω_A (keduanya menyinggung kaki-kaki sudut A) memetakan garis singgung ω yang sejajar BC dan dekat A ke garis singgung ω_A yang sejajar BC dan dekat A , yaitu BC sendiri. Titik singgung D' dipetakan ke titik singgung E , jadi A, D', E segaris. $\square$

Klaim 2. M_a titik tengah DE .

Bukti klaim. Dengan s setengah keliling: $BD = s - b$ (garis singgung dari B ke ω) dan $BE = s - c$ (Soal 11.5). Titik tengah DE berjarak $\frac{(s-b)+(s-c)}{2} = \frac{a}{2}$ dari B , sama dengan M_a . $\square$

Pada segitiga $DD'E$: I titik tengah DD' dan M_a titik tengah DE , jadi $IM_a \parallel D'E$, yaitu $IM_a \parallel AE$ (klaim 1). Pada segitiga DAE , garis melalui titik tengah M_a dari DE yang sejajar AE memotong AD di titik tengahnya (garis tengah).

Kesimpulan. Titik tengah AD terletak pada garis IM_a . $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Bukti keseгарisan A, D', E adalah bagian paling bernilai; tuliskan homoteti dengan jelas.

44.18

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Setiap dua pusat lingkaran dalam yang “bertetangga” terletak pada lingkaran melalui dua titik sudut (karena sudut $90^\circ + \frac{1}{2}(\cdot)$ sama). Segi empat talibusur baru ini memberi sudut-sudut yang dijumlahkan menjadi 90° .

Penyelesaian. Misalkan I_1, I_2, I_3, I_4 pusat lingkaran dalam ABC, BCD, CDA, DAB .

Klaim 1. A, B, I_1, I_4 konsiklis, dan B, C, I_2, I_1 konsiklis.

Bukti klaim. Menurut Soal 15.2, $\angle AI_1B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB$ dan $\angle AI_4B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADB$. Karena $ABCD$ talibusur, $\angle ACB = \angle ADB$, jadi I_1 dan I_4 (di pihak yang sama terhadap AB) melihat AB dengan sudut sama. Pasangan kedua serupa. $\square$

Klaim 2. $\angle I_4I_1I_2 = 90^\circ$.

Bukti klaim. Pada segi empat talibusur ABI_1I_4 , $\angle I_4I_1B = 180^\circ - \angle I_4AB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle DAB$ (AI_4 garis bagi $\angle DAB$). Pada BCI_2I_1 , $\angle I_2I_1B = 180^\circ - \angle I_2CB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD$. Sudut-sudut di sekitar I_1 berjumlah 360° : $\angle I_4I_1I_2 = 360^\circ - \angle I_4I_1B - \angle I_2I_1B = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. $\square$

Kesimpulan. Dengan argumen yang sama di I_2, I_3, I_4 , keempat sudut segi empat $I_1I_2I_3I_4$ siku-siku: persegi panjang. $\blacksquare$

✓ CATATAN PENILAIAN Konfigurasi (urutan titik pada lingkaran baru) memengaruhi pengejaran sudut; sebutkan konfigurasi yang diasumsikan.

↑ PENGEMBANGAN Akibat (teorema Jepang untuk poligon talibusur): jumlah jari-jari lingkaran dalam segitiga-segitiga triangulasi poligon talibusur tidak bergantung pada triangulasinya. Buktikan untuk segi empat dengan hasil di atas.

44.19

Jawaban. 286.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Bola identik ke kotak berbeda: bintang dan batang.

Penyelesaian. Banyak cara sama dengan banyak solusi bilangan bulat tak negatif $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ (x_i = banyak bola di kotak ke- i). Menurut bintang dan batang (10 bintang, 3 batang): $\binom{13}{3} = 286$. ■

CATATAN PENILAIAN Bedakan dengan bola berbeda (4^{10}) yang merupakan soal lain.

44.20

Jawaban. $\binom{n}{4}$.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Titik potong diagonal berkorespondensi dengan pilihan empat titik sudut.

Penyelesaian. Definisikan pemetaan dari himpunan titik potong ke himpunan 4-anggota titik sudut: titik potong dua diagonal XZ dan YW dipetakan ke $\{X, Y, Z, W\}$.

Klaim 1. *Pemetaan ini bijektif.*

Bukti klaim. Dua diagonal yang berpotongan di dalam poligon tidak berbagi titik ujung, jadi empat titik ujungnya berbeda. Sebaliknya, dari keenam ruas yang menghubungkan empat titik sudut (yang dalam posisi konveks), tepat satu pasang ruas saling berpotongan di dalam, yaitu kedua diagonal segi empatnya; jadi empat titik sudut menentukan tepat satu titik potong. Karena tidak ada tiga diagonal serentak, titik potong berbeda berasal dari pasangan diagonal berbeda. □

Kesimpulan. Banyak titik potong $\binom{n}{4}$. ■

CATATAN PENILAIAN Syarat “tidak ada tiga diagonal serentak” dipakai untuk memastikan korespondensi satu-satu; sebutkan.

44.21

Jawaban. Terbukti.

IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Setiap kolom menyumbang satu “pola” (pasangan baris dan warna); pola lebih sedikit daripada kolom.

Penyelesaian.

Langkah 1. Setiap kolom memuat 3 petak dengan 2 warna, jadi (sarang merpati) memuat dua petak sewarna. Untuk setiap kolom pilih satu pasangan seperti itu dan catat (pasangan baris, warna): ada $\binom{3}{2} \cdot 2 = 6$ kemungkinan.

Langkah 2. Ada 7 kolom dan 6 kemungkinan, jadi dua kolom memiliki catatan yang sama: pasangan baris yang sama dan warna yang sama.

Kesimpulan. Keempat petak itu (dua baris, dua kolom) adalah sudut persegi panjang sewarna. ■

CATATAN PENILAIAN Hitung pola dengan benar: 3 pasangan baris $\times$ 2 warna.

44.22

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Graf tanpa siklus memiliki paling banyak $n - 1$ sisi.

Penyelesaian. Andaikan graf G dengan n titik dan paling sedikit n sisi tidak memuat siklus. Maka setiap komponennya adalah pohon. Jika komponennya berukuran $n_1, \dots, n_c$ ($c \geq 1$), banyak sisinya $\sum (n_i - 1) = n - c \leq n - 1$. Kontradiksi dengan $|E| \geq n$. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Hutan dengan beberapa komponen memiliki lebih sedikit sisi; tulis rumus $n - c$.

44.23

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Langkah “meratakan” bilangan menurunkan jumlah kuadrat.

Penyelesaian. Misalkan T jumlah semua bilangan dan Q jumlah kuadratnya.

Klaim 1. T invariant dan Q turun paling sedikit 2 setiap langkah.

Bukti klaim. $(x+1)+(y-1) = x+y$, dan $(x+1)^2+(y-1)^2 - x^2 - y^2 = 2(x-y)+2 = -2(y-x-1) \leq -2$ karena $y - x \geq 2$. □

Kesimpulan. Q bilangan bulat tak negatif yang turun paling sedikit 2 setiap langkah, jadi banyak langkah paling banyak $\frac{Q_{\text{awal}}}{2}$: proses berhenti. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Perubahan jumlah kuadrat harus dihitung eksplisit.

44.24

Jawaban. Terbukti.

💡 IDE KUNCI & CARA MENEMUKANNYA Sifat “baik” dipertahankan oleh pergeseran dan pembagian dengan 2; paritas memaksa semua bilangan genap setelah ada nol. Descent tak hingga menyelesaikan.

Penyelesaian. Sebut barisan bilangan bulat $(a_1, \dots, a_{2n+1})$ baik jika memenuhi sifat soal. Misalkan S jumlahnya.

Klaim 1. Pada barisan baik, semua a_i berparitas sama.

Bukti klaim. Membuang a_i menyisakan dua kelompok dengan jumlah sama, jadi $S - a_i$ genap untuk setiap i ; akibatnya $a_i \equiv S \pmod{2}$ untuk semua i . □

Klaim 2. Jika (a_i) baik, maka $(a_i - c)$ baik untuk setiap bilangan bulat c , dan jika semua a_i genap, $(a_i/2)$ baik.

Bukti klaim. Setiap kelompok berisi n bilangan, jadi mengurangi c mengurangi jumlah kedua kelompok sebesar nc ; membagi 2 membagi kedua jumlah dengan 2. Kesamaan jumlah tetap terjaga. □

Misalkan $m = \min a_i$ dan $b_i = a_i - m$: barisan baik yang tak negatif dan memuat 0. Menurut klaim 1, semua b_i berparitas sama dengan 0, jadi genap; menurut klaim 2, $(b_i/2)$ baik, tak negatif, dan masih memuat 0. Mengulang argumen, setiap b_i habis dibagi 2^j untuk semua j , sehingga $b_i = 0$.

Kesimpulan. $a_i = m$ untuk semua i : semua bilangan sama. ■

✓ **CATATAN PENILAIAN** Kedua sifat invarian (pergeseran dan pembagian) harus dibuktikan sebelum dipakai.

↑ **PENGEMBANGAN** Buktikan pernyataan yang sama untuk bilangan rasional (kalikan dengan penyebut persekutuan) dan pikirkan versi untuk bilangan real (memerlukan aljabar linear).